XVI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа

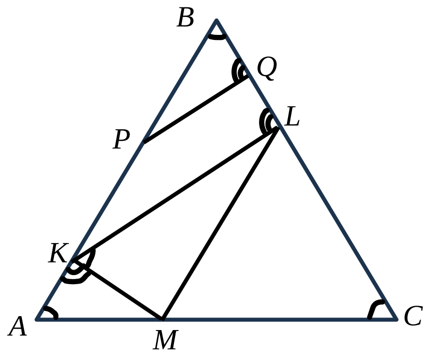
1. *Первоначально имеется один кусок сыра. Разрешается взять любой кусок сыра и проделать с ним одну из трех операций: разделить его на два куска одинакового веса, 11 кусков одинакового веса или 23 куска одинакового веса. Можно ли, используя только эти операции, разделить его на 2024 части одинакового веса?* (И. Рубанов)

Ответ. Можно. **Решение**. Если мы разделим каждый из имеющихся кусков сыра на n частей, то количество частей увеличится в n раз. Назовем это действие *операция n*. Поскольку $2024 = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}11{\cdot}23$, для получения 2024 кусков одинакового веса нам достаточно трижды применить операцию 2 и по одному разу операции 11 и 23.

2. *У Олега есть набор из клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить (без наложений и пробелов) какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?* (О. Подлипский)

Ответ. Не может. **Решение**. Допустим, нам удалось составить искомый квадрат. Пусть полоска $1\times n$ — самая длинная из использованных в нем. Тогда сторона составленного квадрата не меньше, чем n, и, следовательно, его площадь, покрытая остальными использованными полосками, должна быть не меньше, чем $n^2-n = n(n-1)$. Но этих полосок не более, чем $n-1$, и каждая из них короче полоски $1\times n$. Поэтому их суммарная площадь меньше, чем $n(n-1)$. Противоречие.

3. *На сторонах AB, BC, CA равностороннего треугольника ABC выбраны точки K, L, M соответственно так, что $AK = 1$, $BL = 2$, $CM = 3$. Известно, что $\angle MKL = 60°$. Найдите сторону треугольника ABC.* (И. Богданов)



Ответ. 5. **Решение**. Проведем в треугольнике BKL среднюю линию $PQ \parallel KL$. Тогда

$$\angle BQP = \angle BLK = 180°-\angle B-\angle BKL = 180°-\angle MKL-\angle BKL = \angle AKM.$$

Кроме того, $BQ = BL/2 = AK$ и $\angle B = \angle A$. Следовательно, треугольники AKM и BQP равны по стороне и двум углам. Положим $BP = AM = x$. Тогда $1+2x = AK+KB = AB = AC = AM+MC = x+3$ (*), откуда $x = 2$ и $AC = x+3 = 5$. **Замечание**. Используя подобие, можно обойтись без средней линии, сразу получив уравнение (*) из подобия треугольников AKM и BLK по двум углам с коэффициентом $BL/AK = 2$.

4. *По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной еще не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря — чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори?* (П. Кожевников)

Ответ. 50. **Решение**. Нужно показать, что Аня всегда может добиться, чтобы разноцветных пар было не меньше 50, а Боря сможет помешать ей добиться, чтобы таких пар было больше 50.

Первый способ. <u>Стратегия Ани</u>. Первым ходом Аня красит в любой цвет любую точку, а дальше каждым ходом выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной (такая, очевидно, найдется), и красит непокрашенную точку в цвет, отличный от цвета покрашенной. При этом образуется новая пара соседних разноцветных точек.

<u>Стратегия Бори</u>. Каждым ходом Боря выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной, и красит непокрашенную точку в цвет, совпадающий с цветом покрашенной. При этом образуется новая пара соседних одноцветных точек.

<u>Обоснование правильности стратегий</u>. Всего в круге имеется 100 пар соседних точек, и каждый игрок делает за игру по 50 ходов. Сделав свои ходы, Боря добьется того, что из этих 100 пар хотя бы 50 будут одноцветными, а Аня — что хотя бы 49 из них будут разноцветными. Однако заметим, что количество разноцветных пар всегда четно. Действительно, после окончания игры пройдем полный круг, начиная с какой-то отмеченной точки (пусть для определенности с красной). Группы из идущих подряд красных и синих точек при этом будут чередоваться: К–С–К–С–…–К, и значит, встретим пар разноцветных соседей вида К–С столько же, сколько пар вида С–К. Поэтому если пар разноцветных соседних точек не меньше 49, то их хотя бы 50.

Второй способ. Разобьем все отмеченные точки на 50 пар соседей: P_1, P_2, …, P_{50}. <u>Стратегия Бори</u>. Если своим ходом Аня красит точку в паре P_i, то Боря ответным ходом красит вторую точку в паре P_i в тот же цвет. Ясно, что при такой игре Бори в конце игры каждая пара P_i будет покрашена в один цвет. Значит из 100 пар соседних точек не менее 50 будут одноцветными. Поэтому разноцветных пар будет не больше, чем $100-50 = 50$.

Стратегия Ани. Разобьем все отмеченные точки на 50 пар соседей и пронумеруем эти пары: $P_1, P_2, \ldots, P_{50}$. Аня будет добиваться того, чтобы в каждой паре P_i с нечетным номером i она покрасила одну из точек красным, а в каждой паре P_i с четным номером i — синим. Если у Ани это получится, то покрашенные ею 50 точек разобьют окружность на 50 дуг с разноцветными концами. На каждой из этих дуг, очевидно, найдется хотя бы одна пара разноцветных соседних отмеченных точек (в частности, если на дуге нет отмеченных Борей точек, такую пару образуют концы дуги).
Покажем, как Аня может реализовать этот план. Первым ходом она красит одну из точек в какой-то паре P_i соответствующим цветом. Далее, если Боря отвечает ходом в ту же пару, то Аня красит одну из точек в любой еще не покрашенной паре, иначе она красит вторую точку в паре, в которой только что покрасил точку Боря. В результате после каждого хода Ани будет ровно одна пара P_j, в которой одна точка покрашена Аней, а другая не покрашена, а в каждой из остальных пар P_i будет либо две покрашенных точки, ровно одна из которых покрашена Аней, либо ни одной покрашенной точки. Значит, в конце игры Аней будет покрашено ровно по одной точке в каждой паре P_i, что ей и требовалось.

5. *Какие натуральные числа можно представить в виде $a^2+2023b^2-2024c^2$, где a, b, c — различные целые числа?* (П. Козлов)

Ответ. Все, дающие при делении на 4 остаток, не равный 2. **Решение**. Поскольку число $a^2+2023b^2-2024c^2$ дает при делении на 4 такой же остаток, как a^2-b^2, а разность двух квадратов нечетна либо делится на 4, то числа вида $4k+2$ представить в искомом виде нельзя. Докажем, что остальные числа так представить можно. Заметим, что если ко всем числам a, b, c прибавить одно и то же целое число k, то выражение из условия изменится на $2k(a+2023b-2024c)$. Поэтому достаточно подобрать такие целые a_1, b_1, c_1, чтобы сумма $a_1+2023b_1-2024c_1$ равнялась 1, и сдвигами чисел a_1, b_1, c_1 на всевозможные целые k получить из нечетного числа $a_1^2+2023b_1^2-2024c_1^2$ все нечетные числа, а также такие целые a_2, b_2, c_2, чтобы сумма $a_2+2023b_2-2024c_2$ равнялась 2, и сдвигами чисел a_2, b_2, c_2 на всевозможные целые k получить из числа $a_2^2+2023b_2^2-2024c_2^2$ все целые числа, делящиеся на 4. Подойдут, например, $a_1 = 2025$, $b_1 = 0$, $c_1 = 1$ и $a_2 = 2026$, $b_2 = 0$, $c_2 = 1$.

6. *Найдутся ли такие 15 идущих подряд целых чисел, что сумма четырех наименьших из них равна сумме одиннадцати остальных?*(И. Рубанов)

Ответ. Нет. **Первое решение**. Пусть x— наименьшее из данных чисел. По условию должно выполняться равенство $x+(x+1)+(x+2)+(x+3) = (x+4)+(x+5)+\ldots+(x+14)$. После приведения подобных членов получаем $7x+93 = 0$, откуда $x = -93/7$. Значение x получилось нецелым. Значит, искомых 15 целых чисел не существует. **Второе решение**. Вычтем из суммы четырех наименьших из наших чисел сумму четырёх следующих за ними. Получится –16. Поэтому сумма семи оставшихся чисел должна также равняться –16. Но это сумма семи идущих подряд целых чисел, и она должна делиться на 7. Противоречие.

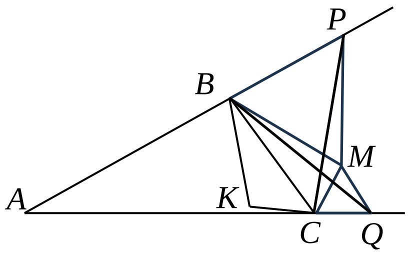
7. *Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой?* (П. Кожевников)

Ответ. Могли. **Решение**. Например, в числах от 10234567890 до 10234567899 все цифры встречаются по 11 раз.

8. *По окружности расставили 2023 числа, наименьшее из которых равно 0, а наибольшее равно N. Для каждых двух чисел, стоящих на окружности рядом, на доску выписали их сумму. Оказалось, что любые два числа на доске отличаются не более чем на 1. Каково наибольшее возможное значение N?* (П. Кожевников)

Ответ. 1011. **Решение**. Оценка. Пусть на окружности идут подряд числа a, b и c. По условию $|(a+b)-(b+c)| = |a-c| \leq 1$. Значит, любые два числа, стоящие на окружности через одно, отличаются не более чем на 1. Пойдем от нуля по кругу с шагом 2. Через 2023 шага мы вернемся в нуль, обойдя все числа. Поскольку на каждом шаге число могло увеличиться максимум на 1, число, большее 1011, может появиться не ранее 1012-го шага. Но в таком случае, после этого числа будет сделано не более 1011 шагов, на каждом из которых число может уменьшиться максимум на 1. Следовательно, в конце получится положительное число. Противоречие. Пример. Пронумеруем места для чисел по часовой стрелке числами 0, 1, 2, …., 2022. На места 0, 2, …, 2022 поставим числа 0, 1, 2, …, 1011, а на места 1, 3, 5, …, 2021 — числа 1011, 1010, 1009, …, 1 соответственно. Сумма чисел, стоящих на местах $2n$ и $2n+1$, при любом n от 0 до 1011 будет равна 1011, а сумма чисел, стоящих на местах $2n-1$ и $2n$, будет при любом n от 1 до 1011 будет равна 1012.

9. *Внутри треугольника ABC выбрана точка K такая, что ÐKCB+ÐACB = ÐKBC+ÐABC = 120°. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C — точка Q таким образом, что BK = BP и CK = CQ. Докажите, что BQ = CP.* (С. Берлов)



Решение. Пусть точка *M* симметрична точке *K* относительно прямой *BC*. Тогда

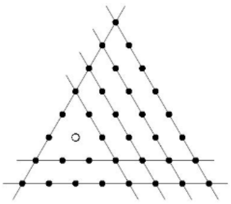
Ð*MBP* =180°–(Ð*MBC*+Ð*ABC*) = 180°–(Ð*KBC*+Ð*ABC*) = 180°–120°= 60°.

Поскольку *BM* = *BK* = *BP*, треугольник *PBM* — равносторонний. Аналогично доказывается, что треугольник *QCM* — равносторонний. Значит, *PM* = *BM* и *CM* = *QM*. Кроме того, Ð*PMC* = Ð*BMC*+60°= Ð*BMQ*. Таким образом, треугольники *PMC* и *BMQ* равны по двум сторонам и углу между ними, и отрезки *BQ* и *CP* равны как их соответственные стороны.

10. *Правильный треугольник T со стороной 111 разбит на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме находящейся в центре T, отмечены. Назовём множество отмеченных точек* ***линейным****, если все его точки лежат на одной прямой, параллельной стороне треугольника T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств?* (И. Богданов)

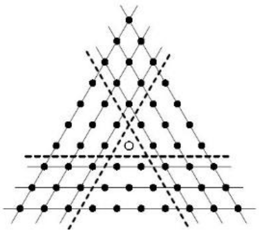
Ответ. $2^{3\cdot 37^2}=2^{4107}$. **Решение**. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной *k*, разобьём его на правильные треугольнички со стороной 1 и отметим все вершины этих треугольничков; полученную конструкцию назовём *k-треугольником*. В дальнейшем под *прямыми* мы всегда будем понимать прямые, параллельные сторонам этого треугольника и проходящие через хотя бы одну отмеченную точку.

Лемма. *Пусть A — отмеченная точка в k-треугольнике. Тогда существует единственный способ провести k прямых так, что все отмеченные точки, кроме, возможно, A, покрыты этими прямыми. Именно, для каждой стороны k-треугольника надо провести все прямые, параллельные ей и лежащие между этой стороной и точкой A (включая саму сторону, но исключая прямую, содержащую A).*



Доказательство. Проведем индукцию по *k*. База при *k* = 1 проверяется легко: надо провести прямую, содержащую две оставшихся точки, кроме *A*. Для перехода рассмотрим сторону *k*-треугольника, на которой не лежит *A*. Если прямая, содержащая эту сторону, не проведена, то все *k*+1 отмеченных точек на этой прямой должны быть покрыты различными прямыми; это невозможно, так как прямых *k*. Значит, эта прямая проведена. Выкинув её и точки *k*-треугольника, лежащие на ней, получаем (*k*–1)-треугольник, в котором проведено *k*–1 прямых с теми же условиями. Осталось применить предположение индукции.

Перейдём к задаче. Рассмотрим одно из разбиений на линейные множества. Для каждого множества проведём прямую, его содержащую. Тогда эти прямые покрыли все отмеченные точки 111-треугольника, кроме, возможно, его центра *A*. Значит, эти прямые устроены так, как описано в лемме, и для любого разбиения этот набор прямых один и тот же.



Заметим, что наш 111-треугольник разбился на 6 областей: три «ромба» в углах, состоящих из точек, покрытых нашими прямыми дважды, и три «трапеции» у сторон, в которых каждая точка покрыты одной прямой (см. рисунок справа). Тогда каждая точка в «трапеции» относится к множеству, лежащему на этой прямой; каждую же точку в «ромбе» можно отнести к любому из двух множеств, лежащих на проходящих через неё прямых. Все такие выборы можно сделать независимо друг от друга. Поскольку в каждом из трёх «ромбов» всего 37^2 точек, получаем, что требуемых разбиений ровно $2^{3\cdot 37^2}$.