XVII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *Найдите три* ***нецелых*** *положительных числа a, b, c таких, что все числа* $\frac{a+b}{a-b}, \frac{b+c}{b-c}, \frac{c+a}{c-a}$ *— целые.*

(В. Шурыгин)

Ответ. Например, 1/5, 2/5 и 3/5. **Комментарий**. Достаточно заметить, что условию удовлетворяют числа 1, 2 и 3, а затем поделить каждое из них на одно и то же число, большее трёх.

2. *В пещере собрались 100 гномов — по 10 гномов из 10 разных кланов. Каждый из них — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжет. Каждый из собравшихся назвал клан, из которого, по его мнению, на собрание пришли одни лжецы. Оказалось, что каждый из 10 кланов назвало ровно 10 гномов. Докажите, что лжецов в пещере не меньше, чем рыцарей.* (И. Рубанов)

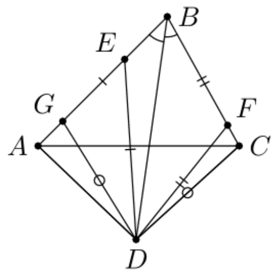
Решение. Допустим, лжецов в пещере меньше, чем рыцарей. Тогда рыцарей там, самое меньшее, 51, и потому среди них есть представители по крайней мере шести кланов. Но тогда все гномы, сказавшие, что из этих кланов на собрание пришли одни лжецы, солгали, и получается, что лжецов среди собравшихся по крайней мере 60, в то время как по нашему предположению их не больше, чем 49. Противоречие.

3. *Числа x, y, z таковы, что* $x > y^2+z^2$, $y > z^2+x^2$, $z > x^2+y^2$. *Докажите, что каждое из чисел x, y, z меньше 1/2.* (Н. Агаханов, А. Храбров)

Первое решение. Так как совокупность данных в условии неравенств сохраняется при перестановках переменных, можно считать, что $x \geq y \geq z$. Тогда $y \geq z > x^2+y^2$, откуда $1/4 > x^2+(y–1/2)^2$ и $1/2 > x \geq y \geq z$, что и требовалось доказать. **Второе решение**. Заметим, что $y+z > (z^2+x^2)+(x^2+y^2)$. Поэтому $2x^2 < (y–y^2)+(z–z^2) = 1/4–(1/2–y)^2+1/4–(1/2–z)^2 < 1/2$. Тогда $x^2 < 1/4$, откуда $x < 1/2$. Аналогично, $y < 1/2$ и $z < 1/2$.

4. *В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублёвой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, начинает Даша. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть её: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, Соня — на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достаётся Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные деньги. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша?* (А. Кузнецов)

Ответ. 300 рублей. **Решение**. Разобьём доску на 100 квадратов 2×2. Если перед ходом Сони на доске есть хотя бы 101 монета, то найдется квадрат, в котором лежат хотя бы две монеты. Если они в соседних клетках, Соня своим ходом ставит одну из них в клетку с другой и забирает монету. В противном случае Соня сдвигает одну из монет в клетку, находящуюся в том же столбце, что и вторая монета, а после следующего хода Даши ставит эту монету в одну клетку со второй и также забирает монету. Действуя таким образом, Соня может забрать с доски по крайней мере 300 монет.
Покажем, что Даша может помешать Соне забрать с доски больше 300 монет. Пусть она отметит в каждом из описанных выше квадратов 2×2 левую нижнюю монету. Покажем, как ей играть, чтобы никакие две отмеченные монеты не оказывались в одной клетке — тогда всякий раз можно считать, что все 100 отмеченных монет остаются на доске. Если Соня подвинула отмеченную монету из ее исходного столбца, Даша подвинет эту монету обратно в исходный столбец. В противном же случае она двигает крайнюю правую отмеченную монету между двумя крайними справа столбцами.



5. *На биссектрисе угла ABC отмечена точка D. На отрезке AB отмечена точка E, а на отрезке BC — точка F, причём AB = DE и BC = DF. Докажите, что из отрезков AD, CD и EF можно сложить треугольник.* (А. Кузнецов)

Решение. Заметим, что $AD+AE > DE$, поэтому $AD > DE–AE = AB–AE = BE$. Аналогично $DC > BF$, откуда $AD+DC > BE+BF > EF$. Без ограничения общности положим $AB \geq BC$. Пусть точка G симметрична точке C относительно прямой BD. Тогда

$$|AD–DC| = |AD–DG| < AG = AB–BG = AB–BC = DE–DF < EF.$$

Итак, $AD+DC > EF > |AD–DC|$, откуда и вытекает утверждение задачи.

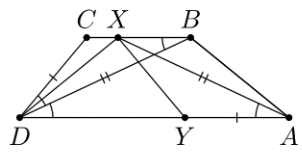
XVII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 2 день

6. *В начале года каждому из 150 бойцов лиги смешанных единоборств был присвоен номер от 1 до 150. В течение года было проведено 149 поединков: первого со вторым, второго с третьим, …, 149-го со 150-м. В конце года был составлен список бойцов, победивших во всех поединках, в которых они участвовали в прошедшем году. Могли ли в этом списке оказаться и все бойцы с номерами кратными 17, и все бойцы с номерами кратными 20?* (Методсовет)

Ответ. Не могли. **Решение**. Бойцы с номерами $119 = 17\cdot 7$ и $120 = 20\cdot 6$ не могут одновременно находиться в списке, потому что иначе в их поединке оба они должны были бы победить.

7. *В трапеции $ABCD$ диагональ BD является биссектрисой угла ADC. На основаниях BC и AD выбрали точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = BD$ и $AY = CD$. Оказалось, что $\angle BCD = 130°$. Найдите величину угла AXY.* (С. Берлов)



Ответ. 25°. **Решение**. Так как $AX = BD$, $ABXD$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $\angle XAD = \angle BDA = \angle BDC$. Следовательно, треугольники AXY и BDC равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $\angle AXY = \angle CBD = \angle BDA = (180°–\angle BCD)/2 = 25°$.

8. *На экране калькулятора горит число 41. За одну операцию можно увеличить или уменьшить число на экране на 33 или 34. При этом запрещается получать числа, меньшие 1, и числа, большие 99. Через 2025 операций на экране оказалось число 50. Докажите, что в некоторый момент на экране было число 67.* (И. Рубанов, А. Кузнецов)

Первое решение. Назовем натуральные числа от 34 до 66 *средними*, а от 1 до 33 и от 67 до 99 — *крайними*. Заметим, что каждая операция, кроме операции прибавления 34 к 33 и вычитания 34 из 67 (назовем эти две операции *особыми*) превращает среднее число в крайнее, а крайнее — в среднее. Исходное число 41 — среднее. Поэтому если особые операции не используются, то после каждой нечетной по счету операции, в том числе и после 2025-й, на экране должно находиться крайнее число. Но итоговое число 50 — среднее. Значит, хотя бы раз была использована особая операция, и перед ней или после неё на экране было число 67. **Второе решение**. Заметим, что после любых двух сделанных подряд операций число на экране по модулю 67 изменяется не более, чем на единицу. После первой операции оно будет по модулю 67 сравнимо с 7 или 8, а в конце должно стать равным 50. Если по пути оно пройдет через 0, то задача решена. Если же нет, то в какой-то момент оно после двух последовательных операций увеличится с 33 до 34. Но тогда после первой из этих двух операций оно станет сравнимо с 0, что и требовалось.

9. *На доску записали несколько (больше одного) последовательных натуральных чисел. Могло ли так случиться, что и сумма всех четных выписанных чисел — квадрат натурального числа, и сумма всех нечетных выписанных чисел — квадрат натурального числа?* (А. Кузнецов)

Ответ. Не могло. **Решение**. Пусть выписано $2k$ чисел, начиная с числа n. Тогда одна из двух указанных в условии сумм равна $S_1 = n+(n+2)+\ldots+(n+2k–1) = (n+(n+2k–2))\cdot k/2 = (n+k–1)\cdot k$, а другая равна $S_2 = (n+1)+\ldots+(n+2k–1) = (n+1+(n+2k–1))\cdot k/2 = (n+k)\cdot k$. Если же выписано $2k+1$ чисел, начиная с числа n, то одна из сумм равна $S_1 = (n+1)+(n+3)+\ldots+(n+2k–1) = (n+1+(n+2k–1))\cdot k/2 = (n+k)\cdot k$, а другая — $S_2 = n+(n+2)+\ldots+(n+2k) = (n+(n+2k))\cdot(k+1)/2 = (n+k)\cdot(k+1)$. В обоих случаях частное S_2/S_1 равно отношению $(m+1)/m$ двух последовательных натуральных чисел, где $m = n+k–1$, если выписано $2k$ чисел, и $m = k$, если выписано $2k+1$ чисел.

Допустим, нашлись такие n и k, что $S_1 = u^2$, $S_2 = v^2$, где u и v — натуральные числа. Тогда по доказанному есть такое натуральное m, что $(m+1)u^2 = m\,v^2$ (*). Можно считать, что числа u и v взаимно просты — иначе поделим u и v на их НОД, и равенство (*) сохранится. Значит, $m = tu^2$. Число t должно быть делителем числа $m+1$, и так как m и $m+1$ взаимно просты, то $t = 1$, и $m = u^2$. Аналогично, $m+1 = v^2$. Но тогда $v^2 = u^2+1$, что невозможно при натуральных u и v, откуда и следует ответ.

Замечание. В случае, когда выписано $2k$ чисел, есть более простое альтернативное доказательство.

В этом случае $S_2 = S_1+k$. При этом $S_1 \geq 1+\ldots+(2k-1) = k^2$, то есть если $S_1 = m^2$, то $m \geq k$. Но тогда $m^2 < S_2 = m^2+k \leq m^2+m < (m+1)^2$, и S_2 не может быть квадратом натурального числа.

10. *На столе стоят 12 сосудов, выстроенных в 4 ряда по 3 сосуда в каждом. В каждый сосуд налито некоторое (возможно, нулевое) количество воды. Известно, что суммарное количество воды в каждом ряду равно 1 л. При каких значениях α можно утверждать, что на столе найдутся два сосуда, количества воды в которых отличаются не более чем на α л?* (И. Богданов)

Ответ. При всех $\alpha \geq 1/17$. **Решение**. Пусть таких сосудов нет. Пусть $k_0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_{11}$ — количества воды в сосудах; назовём *индексом* сосуда его номер в этом ряду. Заметим, что $k_0 \geq 0$ и $k_i > \alpha \cdot i$ при $i \geq 1$. Сумма всех индексов равна $0+1+\ldots+11 = 66$, поэтому найдётся ряд, сумма индексов в котором не меньше, чем 17. Тогда суммарное количество воды в этом ряду больше 17α, откуда $\alpha < 1/17$. Поэтому все $\alpha \geq 1/17$ подходят.
Если распределить воду по рядам как 13/17+1/17+3/17, 10/17+2/17+5/17, 9/17+8/17+0, 7/17+6/17+4/17, то количества воды в любых двух сосудах будут отличаться минимум на 1/17. Есть и другие подобные примеры. Поэтому все α, меньшие 1/17, не подходят.