Материалы для проведения регионального этапа

LII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2025–2026 учебный год

Первый день

2–3 февраля 2026 года

Москва, 2026

Сборник содержит материалы для проведения III этапа LII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2025–2026 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2025–2026 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **2 февраля 2026 г.** (I тур) и **3 февраля 2026 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2025–2026 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

9 класс

9.1. Числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 < (a - b)^2$ и $b^2 + c^2 < (b - c)^2$. Докажите, что $a^4 + c^4 < < (a + c)^4$.

Решение. По условию, $a^2 + b^2 < (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, поэтому $ab < 0$. Аналогично, $bc < 0$. Таким образом, числа a и b разных знаков, и числа b и c также разных знаков. Поэтому числа a и c одного знака и, значит, $ac > 0$. Следовательно, $(a + c)^4 - (a^4 + + c^4) = 4a^3c + 6a^2c^2 + 4ac^3 > 0$, поскольку каждое слагаемое положительно. Отсюда $(a + c)^4 > a^4 + c^4$.

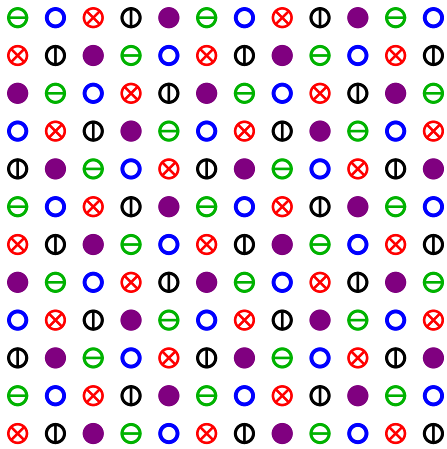
($\star$) Разбор лишь частных случаев, навример, конкретных значений a, b и c . . . . . . 0 баллов

9.2. В клетчатом квадрате 11×11 отметили все 144 вершины клеток. Затем отмеченные точки раскрасили в пять цветов. При каком наибольшем d могло оказаться, что расстояние между любыми двумя одноцветными отмеченными точками не меньше d?

Ответ: $d = \sqrt{5}$.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим в нашем квадрате любые две клетки, имеющие общую сторону. У них всего 6 вершин; расстояние между любыми двумя из них не превосходит $\sqrt{5}$. Но какие-то из этих двух точек имеют один и тот же цвет, так что в любом случае найдутся две одноцветных точки на расстоянии, не большем $\sqrt{5}$.

Пример. На самом деле, можно раскрасить не только данные 144 точки, но и все вершины клеток бесконечной клетчатой плоскости так, чтобы расстояния между одноцветными точками было не меньше $\sqrt{5}$. Пример такой раскраски приведён на рисунке ниже (она переходит в себя при сдвиге на 5 вдоль любой из координатных осей). В этой раскраске одним цветом окрашены все точки с целыми координатами (x, y), для которых число $2x + y$ даёт фиксированный остаток при делении на 5.



Замечание. Как ни странно, существуют и другие способы доказать оценку. Например, можно заметить, что точек одного из цветов не меньше 29; однако все точки нетрудно разбить даже на 24 группы, в каждой из которых точки удалены друг от друга не более чем на $\sqrt{5}$ (например, это можно сделать так, чтобы в каждой группе точки были вершинами двух клеток, имеющих общее ребро). Значит, в одной из групп окажутся две точки нашего цвета, и расстояние между ними будет не больше $\sqrt{5}$.

(О) Доказательство того, что $d \leqslant \sqrt{5}$ . . . . 4 балла

(О′) Неточная оценка — доказательство того, что d не превышает некоторой константы c, которая не меньше $\sqrt{5}$ . . . . не оценивается

(П) Пример раскраски точек, для которой $d = \sqrt{5}$ . . . . 3 балла

При верном примере проверка того, что он подходит, не требуется!

(П′) Неоптимальный пример, в котором достигается лишь некоторое значение $d < \sqrt{5}$ . . . . не оценивается

9.3. Петя и Вася играют в игру. В начале игры на столе лежат 1000 куч, состоящих из 1, 2, 3, 4, …, 999, 1000 спичек соответственно. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из мальчиков своим ходом может взять любое ненулевое количество спичек из кучи с наибольшим количеством спичек (ровно из одной из таких куч, если их несколько). Выигрывает тот, кто заберёт последнюю спичку. Кто из мальчиков может играть так, чтобы гарантированно выиграть?

Ответ: Петя.

Решение 1. Опишем стратегию, позволяющую Пете гарантированно забрать последнюю спичку. Для этого он на каждом ходе будет делать так, чтобы количество куч, содержащих максимальное количество спичек, было чётным (такие позиции будем называть *правильными*).

Докажем, что (1) перед каждым ходом Пети позиция будет неправильной, и (2) он всегда сможет сделать ход, добившись правильной позиции. На первом ходе Пете достаточно взять 1 спичку (из кучи с 1000 спичками), добившись правильной позиции.

Далее, если перед ходом Васи позиция правильная, то после его хода хотя бы одна из наибольших куч останется нетронутой, то есть наибольшее число спичек в куче не изменится. При этом их количество уменьшится ровно на 1, то есть позиция перед ходом Пети станет неправильной.

Пусть теперь перед ходом Пети позиция неправильная, причём в ней ровно a кучек, содержащих максимальное количество спичек (число a нечётно). Если $a > 1$, то Петя, например, забирает полностью одну из максимальных кучек, и позиция становится правильной (в ней $a-1$ максимальная кучка).

Если же $a = 1$, то пусть k — число спичек в следующей за максимальной по величине непустой кучке, и пусть кучек, содержащих k спичек, ровно b (если других непустых кучек нет, то $b = 0$). Если число b чётно, то Петя просто заберёт наибольшую кучку (в частности, если других кучек нет, то Петя заберёт последнюю спичку). Если же b нечётно, то Петя забирает столько спичек, чтобы в кучке осталось k спичек, и таких кучек станет $b+1$; во всех случаях позиция снова станет правильной.

Итак, Петя всегда сможет поддерживать описанные свойства — в частности, Вася никогда не сможет забрать последнюю спичку (в правильной ситуации это невозможно). Так как число спичек уменьшается, это рано или поздно сделает Петя и выиграет.

Решение 2. Заметим, что игра закончится не более чем за 1000^2 ходов. Тогда у одного из мальчиков обязательно есть выигрышная стратегия. Предположим, что её нет у Пети; тогда она есть у Васи.

Пусть Петя первым ходом возьмёт 1 спичку (из кучи с 1000 спичками), а в ответ Вася (по своей стратегии) возьмёт некоторое количество n спичек из кучи с 999 спичками. По нашему предположению, в получившейся позиции выигрывает Вася, то есть игрок, ходящий вторым.

Но этой же позиции мог добиться Петя, взяв на первом ходе $n+1$ спичку из кучи с 1000 спичками. Действуя по той же стратегии, он гарантированно выиграет. Полученное противоречие означает, что у Васи нет выигрышной стратегии, а значит, она есть у Пети.

Комментарий. Метод, описанный во втором решении, называется *передачей хода.*

Критерии оценивания для решения 1.

(О) Только ответ .... 0 баллов

(1) Сформулировано понятие правильной позиции и заявлено, что Пете достаточно добиваться правильной позиции на каждом ходе .... 2 балла

(Х) Замечено, что при каждом ходе число наибольших куч уменьшается на 1, если оно было больше 1 .... 1 балл

(2В) Сформулировано и доказано, что при ходе Васи из правильной позиции получается неправильная .... 1 балл

(3П) Сформулировано и доказано, что Петя может получить правильную позицию из неправильной, **если** $a > 1$ .... 1 балл

*Если в решении содержится стратегия для случая (3П), однако **явно не указано**, что она работает только в случае $a > 1$, баллы по критерию (3П) **не начисляются.***

(4П) Сформулировано и доказано, что Петя может получить правильную позицию, если $a = 1$ . . . . 3 балла

Баллы за продвижения (1), (2В), (3П), (4П) суммируются. Баллы за (X) не суммируются с баллами за (2В) и (3П), но суммируются с баллами за (1) и (4П).

Критерии оценивания для решения 2.

(Z) Не поясняется, почему хотя бы у одного из игроков есть выигрышная позиция или без объяснения используется существование структуры выигрышных и проигрышных позиций . . . . баллы не снимаются

9.4. Существует ли такое натуральное число n, что для каких-то трёх его делителей a, b, c, больших 1, произведение $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на n^2?

Ответ: не существует.

Решение 1. Предположим, что такие n, a, b и c нашлись.

Не умаляя общности, считаем, что $a \leqslant b \leqslant c$. Так как c — делитель числа n, то n^2 делится на c^2. Следовательно, $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на c^2. А поскольку НОД$(c-1, c) = 1$, получаем, что $(a-1)(b-1)$ делится на c^2.

Однако $0 < (a-1)(b-1) < ab \leqslant c \cdot c = c^2$ (в силу $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$), что противоречит делимости $(a-1)(b-1)$ на c^2.

Решение 2. Предположим, что такие n, a, b и c нашлись.

Рассмотрим какой-то простой делитель p числа n. Предположим, что его степень вхождения в n равна α (то есть $\nu_p(n) = \alpha$). Если все числа a, b и c делятся на p, то числа $a-1$, $b-1$, $c-1$ не делятся на p, но тогда и их произведение не делится на p, и следовательно, оно не может делиться и на n^2 — противоречие.

Значит, среди трёх чисел a, b и c на p может делиться не более двух, в разложение каждого из которых p входит не более, чем в степени α (поскольку a, b, c — делители n). Тогда p входит в разложение числа abc в степени не более 2α (то есть $\nu_p(abc) \leqslant 2\alpha$).

Видим, что для каждого простого делителя числа n степень его вхождения в abc не более чем степень его вхождения в n^2 ($\nu_p(abc) \leqslant 2\alpha = \nu_p(n^2)$). А других простых делителей у abc нет. Следовательно, $n^2 \vdots abc$, откуда $n^2 \geqslant abc$.

Поэтому $0 < (a-1)(b-1)(c-1) < abc \leqslant n^2$, что противоречит делимости $(a-1)(b-1)(c-1)$ на n^2.

(A) Из условия выведено, что $(a-1)(b-1)$ делится на c^2 (или аналогичная делимость) . . . . 3 балла

(B) Доказано, что НОД$(a, b, c) = 1$ . . . . баллы не добавляются

(C) Доказано, что $\nu_p(abc) \leqslant \nu_p(n^2)$ . . . . 3 балла

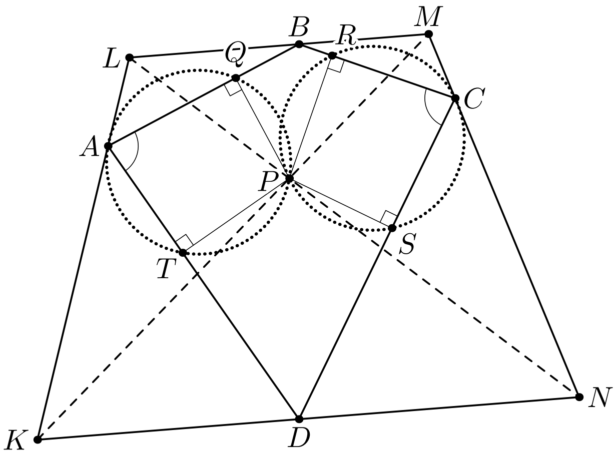
Баллы за продвижения (А) и (С) НЕ суммируются.

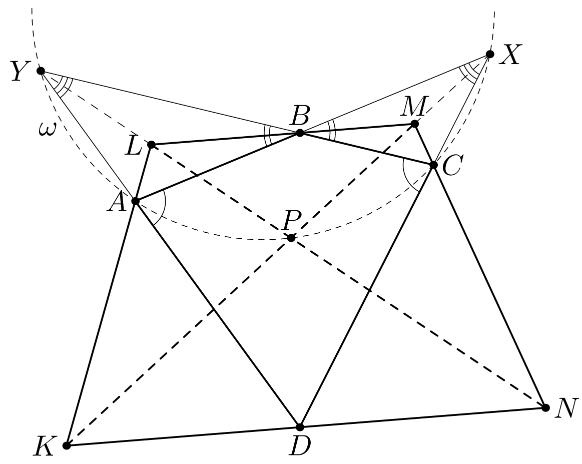
9.5. Выпуклые четырёхугольники $ABCD$ и $KLMN$ расположены так, что прямые KL, LM, MN и NK являются биссектрисами внешних углов A, B, C и D четырёхугольника $ABCD$ соответственно. При этом $ABCD$ не является параллелограммом. Диагонали четырёхугольника $KLMN$ пересекаются в точке P. Докажите, что если $\angle BAD = \angle BCD < 90^\circ$, то $PA = PC$.

Решение 1. Опустим из точки P перпендикуляры PQ, PR, PS и PT на прямые AB, BC, CD и DA соответственно. Заметим, что точка K равноудалена от прямых AB, AD и CD. Аналогично, точка M также равноудалена от AB и CD, и обе точки K и M лежат в том угле между этими прямыми, в котором находится четырёхугольник $ABCD$. Значит, все точки отрезка KM также равноудалены от этих прямых — в частности, точка P, то есть $PQ = PS$, Аналогично, $PR = PT$, и P лежит в том же угле между прямыми BC и AD — то есть P находится внутри четырёхугольника $ABCD$.

Значит, точки Q и T лежат на лучах AB и AD соответственно (а точки R и S — на лучах CB и CD соответственно), так что $\angle QPT = 180^\circ - \angle QAT = 180^\circ - \angle SCR = \angle SPR$, поэтому треугольники QPT и SPR равны по двум сторонам и углу между ними. Наконец, четырёхугольники $AQPT$ и $CSPR$ вписаны в окружности с диаметрами AP и CP соответственно (из прямых углов при вершинах Q, T, R и S). Из равенства треугольников

QPT и SPR следует, что эти окружности равны, а значит, равны из диаметры, что и требовалось доказать.





Решение 2. Если углы B и D четырёхугольника $ABCD$ также равны, то он — параллелограмм, что по условию не так. Пусть без ограничения общности $\angle B > \angle D$. Тогда $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C > 180^\circ$; это означает, что лучи AB и DC пересекаются в некоторой точке X, а лучи DA и CB — в некоторой точке Y. Теперь треугольники BXC и BYA подобны по двум углам, следовательно, $\angle BXC = \angle BYA$, поэтому четырёхугольник $AYXC$ вписанный в некоторую окружность ω.

Точка M — точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника BXC, а точка K — это точка пересечения биссектрис внешних углов XAD и XDA треугольника ADX; значит, они обе лежат на биссектрисе угла AXC. Аналогично, LN — это биссектриса угла AYC, а тогда P — это точка пересечения этих биссектрис. Но обе этих биссектрисы проходят через середину дуги AC окружности ω, не содержащей точек X и Y; значит, P и есть эта середина дуги. Тогда хорды AP и PC, стягивающие равные дуги, равны.

Замечание. Утверждение задачи остаётся верным, если $ABCD$ — параллелограмм (в этом случае P — центр симметрии этого параллелограмма).

Замечание. Заметим, что четырёхугольник $KLMN$ является трапецией ($KN \parallel LM$). Поэтому факт из задачи можно переформулировать следующим образом.

Пусть по бильярдному столу в форме трапеции катается шар, отражаясь последовательно от четырёх сторон в одних и тех же четырёх точках. Тогда точки отражения от боковых сторон трапеции равноудалены от точки пересечения её диагоналей.

(1) Замечено только, что точка K лежит на биссектрисе угла между прямыми AB и CD (или аналогичные утверждения) .... 1 балл

(2) Показано, что точка P лежит на биссектрисе угла между AB и CD . 2 балла вместо 1

(3) Замечено, что точки A, C, X и Y лежат на одной окружности .... 2 балла

Баллы, упомянутые выше, не складываются друг с другом.

($\star$) В работе может отсутствовать обоснование того, что конфигурация выглядит именно так, как в работе. Если при этом используются **верные** (и нетрудно обосновываемые) сведения о расположении точек .... баллы не снимаются

К таким сведениям относятся, в частности, следующие:

- *точки A, B, C, D лежат на сторонах $KLMN$;*
- *точка P лежит внутри четырёхугольника $ABCD$;*
- *точки K и M лежат на* ***одной и той же*** *биссектрисе угла между прямыми AB и CD (если уже обосновано, что каждая из них лежит на биссектрисе);*
- *точки Q и T (из первого решения) лежат на лучах AB и AD соответственно;*
- *точки X и Y (из второго решения) лежат по одну сторону от прямой AC;*
- *у четырёхугольника $ABCD$ нет параллельных сторон.*

10 класс

10.1. Даны 6 последовательных натуральных чисел. Докажите, что их можно обозначить (в некотором порядке) буквами a, b, c, d, e, f так, чтобы число $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{d}{e+f}$ было натуральным.

Решение 1. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ — данные натуральные числа. Положим $a=n+1$, $b=n$, $c=n+2$, $d=n+4$, $e=n+3$, $f=n+5$. Тогда $\frac{a}{b+c}=\frac{n+1}{2n+2}=\frac{1}{2}$ и аналогично $\frac{d}{e+f}=\frac{1}{2}$. Видим, что сумма наших дробей равна 1.

Решение 2. Пусть $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ — данные натуральные числа. Положим $a=n$, $b=n+1$, $c=n+4$, $d=n+5$, $e=n+2$, $f=n+3$. Тогда $\frac{a}{b+c}+\frac{d}{e+f}=\frac{n}{2n+5}+\frac{n+5}{2n+5}=1$.

Замечание. Помимо варианта из решения 2 подходят также и другие варианты, в которых пары b и c, e и f, a и d симметричны относительно середины отрезка $[n, n+5]$; в таком случае $b+c=e+f=a+d$, и наша сумма дробей равна 1.

(A) Предъявлено обозначение чисел, которое работает (даже без явного вычисления $\frac{a}{b+c}+$ $+\frac{d}{e+f}$) .... 7 баллов

(B) Приведены частные примеры, но не ясно, как они обобщаются для произвольного n .... 3 балла

10.2. У Даши и у Саши есть по доске 9×9. Даша укладывает на свою доску 40 не перекрывающихся плиток 1×2 (так, что плитки занимают 80 клеток, а одна клетка остается не покрытой). Пусть у нее есть D способов сделать это. Саша красит на своей доске 41 единичных отрезков-границ между соседними клетками, так, чтобы для каждой клетки доски хотя бы одна ее сторона была покрашена. Пусть у Саши S способов сделать это. Докажите, что $S\leqslant 2D$.

Решение. Рассмотрим одну из S Сашиных покрасок. В ней каждый из 41 покрашенных отрезков принадлежит двум клеткам. Поскольку на доске всего $81=2\cdot 41-1$ клеток, видим, что у всех клеток, кроме некоторой одной клетки K, покрашена ровно одна сторона, а у клетки K покрашены две стороны. Пусть в клетке K покрашены стороны a и b, где a — граница между клетками K и A, а b — граница между клетками K и B.

Сопоставим этой Сашиной покраске две Дашиных укладки следующим образом. Первая укладка такая: забудем про отрезок a и положим 40 доминошек 1×2, у которых средними линиями служат все покрашенные Сашей отрезки, кроме a. (Понятно, что доминошки не перекрываются, так как иначе, если две доминошки имели бы общую клетку, то у этой клетки нашлись бы две покрашенные стороны.) Аналогично забудем про отрезок b и получим вторую Дашину укладку.

С другой стороны, при указанном сопоставлении конкретная Дашина укладка сопоставлена не более чем четырем Сашины покраскам, так как в такой Сашиной покраске обязательно покрашены 40 единичных отрезков — средних линий Дашиных доминошек, а кроме того, покрашена одна из сторон клетки, не покрытой Дашиными доминошками (а таких сторон — 2, 3 или 4).

Итак, каждой из S Сашиных покрасок поставлено в соответствие ровно две из D Дашиных укладок, а каждая из D укладок соответствует не более чем четырем Сашиным покраскам. Отсюда $2S\leqslant 4D$, и мы получили $S\leqslant 2D$, что и требовалось.

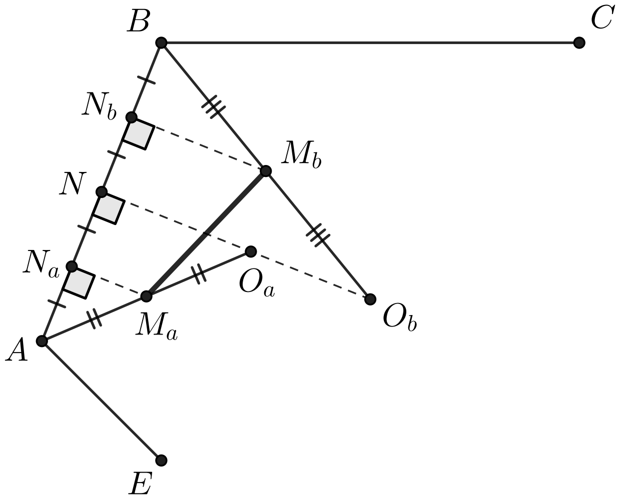
(A) Предъявлено соответствие «покраска $\to$ укладка» либо «укладка $\to$ покраска» из решения .... 4 балла

Если в работе имеется верное соответствие, за пробелы в доказательстве того, что каждой покраске соответствуют ровно две укладки, а каждой укладке — не более четырех покрасок, может быть снято до 3 баллов (в зависимости от величины пробела), т.е. такая работа оценивается в 4 — 7 баллов.

10.3. Периметр выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равен 2. Пусть O_a, O_b, O_c, O_d, O_e — центры описанных окружностей треугольников EAB, ABC, BCD, CDE, DEA соответственно. Пусть M_a, M_b, M_c, M_d, M_e — середины отрезков AO_a, BO_b, CO_c, DO_d, EO_e соответственно. Докажите, что

$$M_aM_b + M_bM_c + M_cM_d + M_dM_e + M_eM_a \geqslant 1.$$

Решение. Достаточно доказать, что $M_aM_b \geqslant \frac{1}{2}AB$. Действительно, тогда сложив это неравенство и четыре аналогичных (для сторон BC, CD, DE, EA), получим (с учетом $AB + BC + CD + DE + EA = 2$) требуемое неравенство.



Заметим, что O_a лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, иначе говоря, проекция точки O_a на прямую AB совпадает с серединой N отрезка AB. Тогда проекция точки M_a на прямую AB совпадает с серединой N_a отрезка AN. Аналогично, проекция точки M_b на прямую AB совпадает с серединой N_b отрезка BN. Так как длина отрезка не меньше длины его проекции, имеем $M_aM_b \geqslant N_aN_b = \frac{1}{2}AB$. Это мы и хотели установить.

(A) Заявлено (но не доказано или доказано неверно), что $M_aM_b \geqslant \frac{1}{2}AB$ (или аналогичное неравенство) ....3 балла

(B) Правильно описана проекция точки M_a на AB .... 2 балла

Баллы за продвижения (A) и (B) суммируются.

10.4. Существует ли такое натуральное число n, что для каких-то трёх его делителей a, b, c, больших 1, произведение $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на n^2?

Ответ: не существует.

Решение 1. Предположим, что такие n, a, b и c нашлись.

Не умаляя общности, считаем, что $a \leqslant b \leqslant c$. Так как c — делитель числа n, то n^2 делится на c^2. Следовательно, $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на c^2. А поскольку НОД$(c-1, c) = 1$, получаем, что $(a-1)(b-1)$ делится на c^2.

Однако $0 < (a-1)(b-1) < ab \leqslant c \cdot c = c^2$ (в силу $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$), что противоречит делимости $(a-1)(b-1)$ на c^2.

Решение 2. Предположим, что такие n, a, b и c нашлись.

Рассмотрим какой-то простой делитель p числа n. Предположим, что его степень вхождения в n равна α (то есть $\nu_p(n) = \alpha$). Если все числа a, b и c делятся на p, то числа $a-1$, $b-1$, $c-1$ не делятся на p, но тогда и их произведение не делится на p, и следовательно, оно не может делиться и на n^2 — противоречие.

Значит, среди трёх чисел a, b и c на p может делиться не более двух, в разложение каждого из которых p входит не более, чем в степени α (поскольку a, b, c — делители n). Тогда p входит в разложение числа abc в степени не более 2α (то есть $\nu_p(abc) \leqslant 2\alpha$).

Видим, что для каждого простого делителя числа n степень его вхождения в abc не более чем степень его вхождения в n^2 ($\nu_p(abc) \leqslant 2\alpha = \nu_p(n^2)$). А других простых делителей у abc нет. Следовательно, $n^2 \,\vdots\, abc$, откуда $n^2 \geqslant abc$.

Поэтому $0 < (a-1)(b-1)(c-1) < abc \leqslant n^2$, что противоречит делимости $(a-1)(b-1)(c-1)$ на n^2.

(A) Из условия выведено, что $(a-1)(b-1)$ делится на c^2 (или аналогичная делимость) . . . . 3 балла

(B) Доказано, что НОД$(a, b, c) = 1$ . . . . баллы не добавляются

(C) Доказано, что $\nu_p(abc) \leqslant \nu_p(n^2)$ . . . . 3 балла

Баллы за продвижения (A) и (C) НЕ суммируются.

10.5. В Средиземье 1000 графств, в одном из которых находится волшебное Кольцо. Раз в день Маг может выбрать любое подмножество графств, и получить от волшебного Камня ответ, есть ли Кольцо в одном из этих графств. Камень может ошибиться, но никогда не ошибается два дня подряд. Маг может совершать данное действие некоторое количество дней, после чего он должен отправить гонцов в некоторые k графств, в одном из которых наверняка находится Кольцо. При каком наименьшем k Маг может это сделать?

Ответ: 2.

Решение. *Оценка.* Покажем, что при $k = 1$ Маг не сможет гарантированно найти Кольцо.

Назовём одно из графств без Кольца лжеграфством. Пусть Камень отвечает на нечётных вопросах так, будто Кольцо в истинном графстве, а на чётных — будто оно во лжеграфстве. Тогда какие бы графства Маг ни загадывал, будут возможны две ситуации: Кольцо в истинном графстве или во лжеграфстве. Действительно, в первом случае Камень отвечает верно по крайней мере на нечётных вопросах, во втором — на чётных. Поэтому Маг не сможет отличить эти ситуации ни за какое количество вопросов.

Пример. Покажем, как Маг может гарантированно разыскать Кольцо при $k = 2$. Выберем какие-то два графства A и B: первое и второе. Зададим подряд вопросы про A, B, B, A.

1. Если Камень на первые два вопроса ответил соответственно «да» и «нет», то т.к. среди этих ответов был хотя бы один верный, в графстве B гарантированно нет Кольца.

2. Если он ответил «нет» и «да», в A нет Кольца.

3. Если Камень на первые два вопроса ответил «да» и «да», то т.к. среди этих ответов был хотя бы один верный, Маг сразу отправит гонцов в A и B.

4. Если Камень на первые два вопроса ответил «нет» и «нет», смотрим на третий вопрос. Если ответ «нет», то поскольку среди второго и третьего ответов был хотя бы один верный, в B графстве нет Кольца.

Если же ответ на третий вопрос — «да», смотрим на четвертый вопрос. Если ответ «да», получаем с двумя последними вопросами такую же ситуацию, как в случае 3. Если ответ «нет», получаем ситуацию из случая 1.

В результате таких действий с двумя графствами A и B Маг либо немедленно найдет Кольцо, либо сможет понять про одно из них, что в нём кольца нет. Тем самым, задача сведена к той же задаче с меньшим числом графств. Повторяя такие действия, Маг добьётся требуемого.

(Z) Только ответ (без обоснований или с неверным обоснованием) . . . . 0 баллов

(A) Доказано только, что при $k = 1$ гарантированно отыскать графство с Кольцом не удастся . . . . 1 балл

(B) Приведён и обоснован верный алгоритм для $k = 2$, как Магу выиграть . . . . . . 5 баллов

(За пробелы в обосновании алгоритма баллы за часть (B) могут быть снижены.)

(C) Приведён алгоритм, как Магу выиграть, для некоторого $k > 2$ баллы не добавляются

11 класс

11.1. Даны 6 последовательных натуральных чисел. Докажите, что их можно обозначить (в некотором порядке) a, b, c, d, e, f так, чтобы число $\frac{a}{b+c}+\frac{d}{e+f}$ было натуральным.

Решение 1. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ — данные натуральные числа. Положим $a=n+1$, $b=n$, $c=n+2$, $d=n+4$, $e=n+3$, $f=n+5$. Тогда $\frac{a}{b+c}=\frac{n+1}{2n+2}=\frac{1}{2}$ и аналогично $\frac{d}{e+f}=\frac{1}{2}$. Видим, что сумма наших дробей равна 1.

Решение 2. Пусть $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ — данные натуральные числа. Положим $a=n$, $b=n+1$, $c=n+4$, $d=n+5$, $e=n+2$, $f=n+3$. Тогда $\frac{a}{b+c}+\frac{d}{e+f}=\frac{n}{2n+5}+\frac{n+5}{2n+5}=1$.

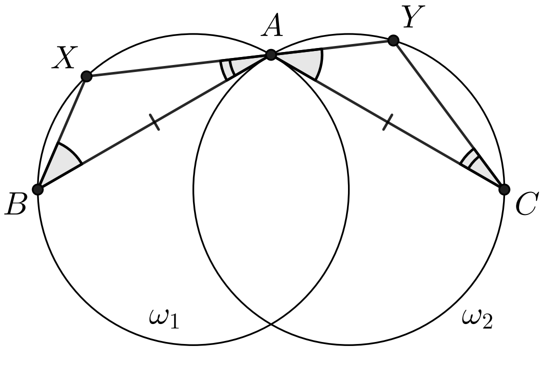
Замечание. Помимо варианта из решения 2 подходят также и другие варианты, в которых пары b и c, e и f, a и d симметричны относительно середины отрезка $[n, n+5]$; в таком случае $b+c=e+f=a+d$, и наша сумма дробей равна 1.

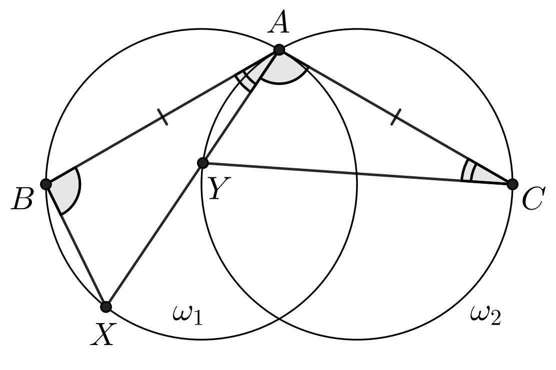
(A) Предъявлено обозначение чисел, которое работает (даже без явного вычисления $\frac{a}{b+c}+$ $+\frac{d}{e+f}$) .... 7 баллов

(B) Приведены частные примеры, но не ясно, как они обобщаются для произвольного n .... 3 балла

11.2. Две равные окружности ω_1 и ω_2 проходят через точку A. На окружности ω_1 отмечена точка B так, что прямая AB касается окружности ω_2. На окружности ω_2 отмечена точка C так, что прямая AC касается окружности ω_1. Прямая, проходящая через точку A, повторно пересекает окружность ω_1 в точке X и окружность ω_2 в точке Y. Докажите, что один из отрезков BX, CY и XY равен сумме двух других.

Решение. Поскольку окружности равны, то при симметрии, переводящей одну из них в другую, касательная AB переходит в касательную AC. Отсюда следует, что $AB=AC$.





Предположим, что точка A лежит на отрезке XY, то есть прямая ℓ не проходит внутри угла BAC. Поскольку прямая AB касается ω_2, то $\angle BAX=\angle ACY$. Поскольку прямая AC касается ω_1, то $\angle ABX=\angle CAY$. Таким образом, треугольники ABX и CAY равны, поэтому $BX=AY$ и $AX=CY$. В этом случае $XY=AX+AY=BX+CY$.

Теперь разберем оставшийся случай. Пусть точка Y лежит на отрезке AX. Снова, используя касание, получаем равенства углов $\angle ABX=\angle YAC$ и $\angle BAX=\angle YCA$, откуда также равны треугольники ABX и CAY. На этот раз $XY=AX-AY=CY-BX$, поэтому $CY=BX+XY$, что и требовалось. Случай, когда точка X лежит на отрезке AY разбирается аналогично.

(A) Разобран случай, когда точка A лежит на отрезке XY .... 3 балла

(B) Разобран случай, когда точка A лежит на продолжении отрезка XY .... 4 балла

(C) Разобран один из случаев, сказано о существовании второго случая. При этом никак не указывается, что некоторые равенства будут выглядеть по-другому .... 1 балл за неразобранный случай

Продвижение (C) суммируется с баллами за разобранный случай (A) или (B).

11.3. Петя и Вася играют в игру. В начале игры на столе лежат 1000 куч, состоящих из 1, 2, 3, 4, ..., 999, 1000 спичек соответственно. Ребята ходят по очереди, начинает Петя.

Каждый из мальчиков своим ходом может взять любое ненулевое количество спичек из кучи с наибольшим количеством спичек (ровно из одной из таких куч, если их несколько). Выигрывает тот, кто заберёт последнюю спичку. Кто из мальчиков может играть так, чтобы гарантированно выиграть?

Ответ: Петя.

Решение 1. Опишем стратегию, позволяющую Пете гарантированно забрать последнюю спичку. Для этого он на каждом ходе будет делать так, чтобы количество куч, содержащих максимальное количество спичек, было чётным (такие позиции будем называть *правильными*).

Докажем, что (1) перед каждым ходом Пети позиция будет неправильной, и (2) он всегда сможет сделать ход, добившись правильной позиции. На первом ходе Пете достаточно взять 1 спичку (из кучи с 1000 спичками), добившись правильной позиции.

Далее, если перед ходом Васи позиция правильная, то после его хода хотя бы одна из наибольших куч останется нетронутой, то есть наибольшее число спичек в куче не изменится. При этом их количество уменьшится ровно на 1, то есть позиция перед ходом Пети станет неправильной.

Пусть теперь перед ходом Пети позиция неправильная, причём в ней ровно a кучек, содержащих максимальное количество спичек (число a нечётно). Если $a > 1$, то Петя, например, забирает полностью одну из максимальных кучек, и позиция становится правильной (в ней $a - 1$ максимальная кучка).

Если же $a = 1$, то пусть k — число спичек в следующей за максимальной по величине непустой кучке, и пусть кучек, содержащих k спичек, ровно b (если других непустых кучек нет, то $b = 0$). Если число b чётно, то Петя просто заберёт наибольшую кучку (в частности, если других кучек нет, то Петя заберёт последнюю спичку). Если же b нечётно, то Петя забирает столько спичек, чтобы в кучке осталось k спичек, и таких кучек станет $b + 1$; во всех случаях позиция снова станет правильной.

Итак, Петя всегда сможет поддерживать описанные свойства — в частности, Вася никогда не сможет забрать последнюю спичку (в правильной ситуации это невозможно). Так как число спичек уменьшается, это рано или поздно сделает Петя и выиграет.

Решение 2. Заметим, что игра закончится не более чем за 1000^2 ходов. Тогда у одного из мальчиков обязательно есть выигрышная стратегия. Предположим, что её нет у Пети; тогда она есть у Васи.

Пусть Петя первым ходом возьмёт 1 спичку (из кучи с 1000 спичками), а в ответ Вася (по своей стратегии) возьмёт некоторое количество n спичек из кучи с 999 спичками. По нашему предположению, в получившейся позиции выигрывает Вася, то есть игрок, ходящий вторым.

Но этой же позиции мог добиться Петя, взяв на первом ходе $n + 1$ спичку из кучи с 1000 спичками. Действуя по той же стратегии, он гарантированно выиграет. Полученное противоречие означает, что у Васи нет выигрышной стратегии, а значит, она есть у Пети.

Комментарий. Метод, описанный во втором решении, называется *передачей хода.*

Критерии оценивания для решения 1.

(О) Только ответ .... 0 баллов

(1) Сформулировано понятие правильной позиции и заявлено, что Пете достаточно добиваться правильной позиции на каждом ходе .... 2 балла

(Х) Замечено, что при каждом ходе число наибольших куч уменьшается на 1, если оно было больше 1 .... 1 балл

(2В) Сформулировано и доказано, что при ходе Васи из правильной позиции получается неправильная .... 1 балл

(3П) Сформулировано и доказано, что Петя может получить правильную позицию из неправильной, **если** $a > 1$ .... 1 балл

Если в решении содержится стратегия для случая (3П), однако ***явно не указано****, что она работает только в случае $a > 1$, баллы по критерию (3П)* ***не начисляются.***

(4П) Сформулировано и доказано, что Петя может получить правильную позицию, если $a = 1$ .... 3 балла

Баллы за продвижения (1), (2В), (3П), (4П) суммируются. Баллы за (X) не суммируются с баллами за (2В) и (3П), но суммируются с баллами за (1) и (4П).

Критерии оценивания для решения 2.

(Z) Не поясняется, почему хотя бы у одного из игроков есть выигрышная позиция или без объяснения используется существование структуры выигрышных и проигрышных позиций .... баллы не снимаются

11.4. Две бесконечные последовательности $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ натуральных чисел таковы, что при любых различных натуральных m и k число $a_m - b_k$ делится на $m - k$. Обязательно ли $a_n = b_n$ при всех натуральных n?

Ответ: Обязательно.

Решение. Зафиксируем натуральное число n и покажем, что $a_n = b_n$. Пусть M — натуральное число, большее a_n и b_n. Из условия задачи следует, что числа $a_n - b_{n+M}$, $a_{n+2M} - b_{n+M}$ и $a_{n+2M} - b_n$ кратны M. Значит, число $(a_n - b_{n+M}) - (a_{n+2M} - b_{n+M}) + (a_{n+2M} - b_{n+M}) = a_n - b_n$ тоже делится на M. Однако, поскольку $a_n < M$ и $b_n < M$, это возможно лишь в случае $a_n = b_n$, что и требовалось.

(A) Доказано, что числа a_n и b_n дают одинаковый остаток от деления на любое натуральное число M .... не менее 5 баллов.

11.5. Некоторые рёбра выпуклого многогранника удалось покрасить в красный цвет так, что в каждую вершину входит ровно два красных ребра, причём эти ребра лежат в одной грани. Кроме того, в каждой грани оказалось не более двух красных ребер. Сколько вершин может быть в таком многограннике?

Ответ: Ответ: любое чётное число вершин, большее 2.

Решение. Поскольку из каждой вершины исходит ровно два красных ребра, то красные рёбра образуют несколько непересекающихся циклических маршрутов по вершинам многогранника. Рассмотрим один такой цикл из красных рёбер, он делит поверхность многогранника на две части, покрасим одну из таких частей в синий цвет, другую в зелёный. Пусть A — одна из вершин циклического маршрута. Исходящие из неё красные рёбра лежат в одной грани по условию задачи. Покрасим вершину A в тот цвет, в который покрашена эта грань. Таким образом мы получим, что в циклическом маршруте синие и зелёные вершины чередуются, поэтому вершин в нем чётное число. Следовательно, и общее количество вершин в многограннике чётно.

Теперь приведём пример для чётного числа вершин. Для 4 вершин подойдет тетраэдр $ABCD$, в котором красным покрашены ребра AB, BC, CD, DA. Пусть $n \geqslant 3$. Рассмотрим правильную $2n$-угольную призму $A_1A_2\ldots A_{2n}B_1B_2\ldots B_{2n}$ и соответствующую $2n$-вершинную антипризму, образованную вершинами A_i, где $i = 1, 3, \ldots, 2n-1$, и вершинами B_j, где $j = 2, 4, \ldots n$. Под условие подойдёт покраска в красный цвет рёбер, по которым граничат «боковые» треугольные грани: $A_1B_2, B_2A_3, \ldots, B_{2n}A_1$. Таким образом, в каждой треугольной грани будет окрашено два ребра, а в двух n-угольных гранях не будет красных рёбер.

(A) Верный ответ и пример для 4 вершин .... 1 балл

(A0) Только ответ или только пример для 4 вершин .... 0 баллов

(B) Пример для чётного числа вершин, большего либо равного 6 .... 3 балла

(C) Доказательство, что количество вершин чётно .... 3 балла

(X) В ответе ошибочно указано, что подходят все чётные числа ..... баллы не снимаются

Продвижение (A) оценивается в 1 балл даже при наличии неточности (X). Баллы за части (A), (B), (C) суммируются.

Материалы для проведения регионального этапа

LII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2025–2026 учебный год

Второй день

2–3 февраля 2026 года

Москва, 2026

Сборник содержит материалы для проведения III этапа LII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2025–2026 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2025–2026 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **2 февраля 2026 г.** (I тур) и **3 февраля 2026 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2025–2026 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

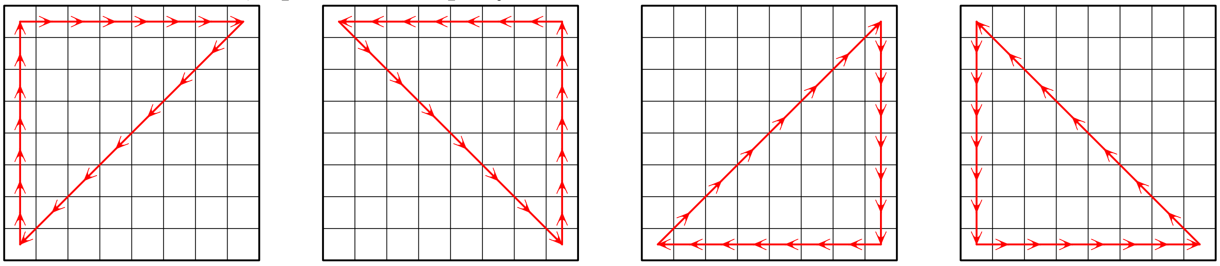
Авторы и составители сборника

9 класс

9.6. Тренер дал начинающим шахматистам задание: каждый должен подойти к шахматной доске 8×8, поставить шахматного короля на одну из угловых клеток и сделать им 21 ход так, чтобы король побывал в каких-то двух других угловых клетках и вернулся в исходную клетку. После этого короля убирают, и к доске подходит следующий ребёнок. Четыре ребёнка по очереди выполнили задание. Обязательно ли после этого найдутся такие две клетки A и B, что хотя бы два ребёнка сделали ход королём с клетки A на клетку B?

Ответ: Не обязательно.

Решение. Пример четырёх обходов, совершённых детьми, при которых таких двух клеток не найдётся, приведён на рисунке ниже.



Замечание. Существуют и немного другие примеры. Укажем общие свойства *всех* возможных примеров.

В каждую угловую клетку король должен (у разных детей) входить с разных клеток, и уходить с неё на разные. Поскольку у угловых клеток всего три соседних, каждая угловая клетка должна быть посещена ровно трижды. Далее, между любыми двумя посещениями угловых клеток должно пройти ровно 7 ходов. У каждого ребёнка король должен подряд посетить две угловых клетки, расположенных «по диагонали» друг от друга, и между этими клетками он должен совершить 7 диагональных ходов. Значит, обе диагонали доски должны быть пройдены по два раза в разных направлениях. Отсюда уже можно вывести, что порядок посещения угловых клеток у четырёх детей должен быть таким же, как в примере сверху, либо же обратным (у всех детей). Наконец, на пути между двумя соседними угловыми клетками (скажем, находящимися в одной строке) первый и последний ход должны быть горизонтальными, а вот между ними путь может выглядеть по-разному.

(⋆) Любой верный пример четырёх обходов доски, удовлетворяющих требованиям7 баллов

(0) Пример, в котором *не указаны* направления обходов (но их можно указать так, чтобы получился верный пример!) ....4 балла

(1) То же, но указано направление лишь одного обхода из четырёх ....5 баллов

(2) То же, но указано направление хотя бы двух обходов ....7 баллов

9.7. Дано нечётное простое число p. Найдите все пары натуральных чисел a и b таких, что $\frac{a}{p} + \frac{p}{b} = 2$.

Ответ: Пары $a = b = p$ и $a = 2p - 1$, $b = p^2$.

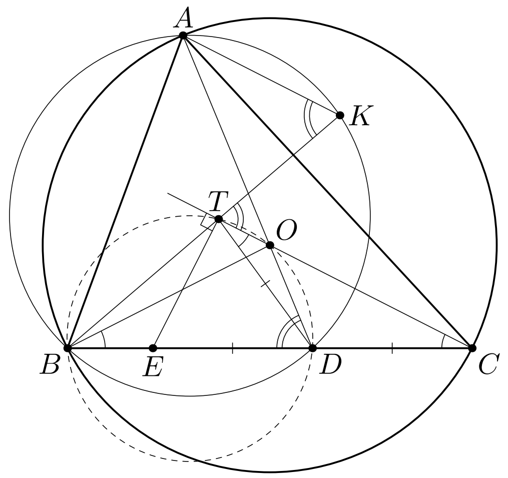
Решение. Умножив равенство на pb, получаем $ab + p^2 = 2pb$, откуда $p^2 = (2p - a)b$. Значит, b — натуральный делитель числа p^2. У p^2 всего 3 натуральных делителя 1, p и p^2. Если $b = 1$, то $2p - a = p^2$, значит, $a = 2p - p^2 = p(2 - p) < 0$, то есть этот случай невозможен. Если $b = p$, то $2p - a = p$, откуда $a = p$. Если $b = p^2$, то $2p - a = 1$, откуда $a = 2p - 1$. Обе найденные пары (p, p) и $(2p - 1, p^2)$, как нетрудно проверить, подходят.

Замечание. Обратим внимание, что все преобразования в решении равносильны (если числа a, b и p натуральны), поэтому на самом деле проверка того, что полученные ответы подходят, не требуется.

(О+) Только полный ответ .... 1 балл
(О−) Неполный ответ (в котором хотя бы один случай упущен) .... не оценивается
(О) Если в работе ответ неверен .... не более 5 баллов за задачу
(А) Получено равенство $p^2 = (2p - a)b$ (именно такое, с разложением на множители!) или хотя бы одна из делимостей $p^2 \vdots b$ и $p^2 \vdots 2p - a$ .... 3 балла
(В−) Во в целом верном решении при переборе делителей числа p^2 ровно один из них (1, p или p^2) упущен или разобран неверно .... снимаются 2 балла
(С) В решении с существенно неравносильными переходами отсутствует проверка того, что ответы подходят .... снимается 1 балл

9.8. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Прямая AO пересекает отрезок BC в точке D. Точка E выбрана на отрезке BC так, что D — середина отрезка CE. Основание T перпендикуляра, опущенного из E на CO, лежит в треугольнике ABD. Прямая BT пересекает окружность, описанную около треугольника ABD, в точке K. Докажите, что прямые AK и CO параллельны.

Решение. Так как треугольник CET прямоугольник, середина гипотенузы D равноудалена от вершин T и C. Тогда из равнобедренных треугольников DTC и OBC имеем $\angle OTD = \angle OCD = \angle OBD$, поэтому четырёхугольник $OTBD$ — вписанный. Значит, $\angle ADB = \angle ODB = \angle OTK$. С другой стороны, поскольку четырёхугольник $AKDB$ вписан, имеем $\angle ADB = \angle AKB = \angle AKT$. Итак, $\angle OTK = \angle AKT$, откуда и следует, что прямые OT (то есть CO) и AK параллельны.



(1) Доказано, что точки O, T, D и B лежат на одной окружности .... 3 балла
(2) Утверждение задачи сведено к факту, что точки O, T, D и B лежат на одной окружности .... 3 балла

9.9. Числа a, b и c больше единицы и удовлетворяют равенству $\left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right) = 1.$ Докажите, что

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{c}\right)^2 \geqslant \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

Решение. Домножив первую скобку в равенстве из условия на $\frac{b}{a}$, вторую на $\frac{c}{b}$, а третью на $\frac{a}{c}$, получим равенство

$$\left(b - \frac{1}{a}\right)\left(c - \frac{1}{b}\right)\left(a - \frac{1}{c}\right) = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1. \qquad (*)$$

По неравенству о средних для трех чисел из $(*)$ получаем

$$\left(b - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{c}\right)^2 \geqslant 3\left(\left(b - \frac{1}{a}\right)\left(c - \frac{1}{b}\right)\left(a - \frac{1}{c}\right)\right)^{2/3} = 3.$$

Раскрыв скобки в левой части и перенеся все попарные произведения в правую часть, получаем, что

$$a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant 3+2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\geqslant 6+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right),$$

где в последнем неравенстве мы снова применили неравенство о средних для трех чисел: $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=3$.

Осталось заметить, что то же самое получится, если раскрыть скобки в требуемом неравенстве и перенести 6 в правую часть.

9.10. В большой компании у каждого человека ровно 100 знакомых в этой же компании (если A знаком с B, то и B знаком с A). Оказалось, что у любого человека среди его 100 знакомых есть хотя бы одна пара незнакомых друг с другом людей. При каком наибольшем k можно утверждать, что в компании найдётся такой человек, что среди его 100 знакомых найдутся хотя бы k различных пар людей, в каждой из которых люди не знакомы друг с другом? (Один человек может входить в несколько таких пар.)

Ответ: $k=50$.

Решение 1. Введём граф, вершины которого будут соответствовать людям; две вершины соединены синим ребром, если соответствующие работники знакомы, и красным иначе. Тогда из каждой вершины v выходят ровно 100 синих рёбер — назовём множество их вторых концов *окрестностью* $N(v)$ вершины v, и в каждом множестве $N(v)$ есть две вершины, соединённые красным ребром. Требуется же выяснить, при каком наибольшем k обязательно найдётся вершина v такая, что на вершинах множества $N(v)$ есть хотя бы k красных рёбер.

Пример. Покажем сначала, что при $k\geqslant 51$ требуемая вершина найдётся не всегда. Рассмотрим 102 вершины, разобьём их на пары и вершины каждой пары соединим красным ребром. Все остальные пары вершин соединим синими рёбрами. Тогда окрестность каждой вершины состоит из 50 пар, и на них есть ровно 50 красных рёбер. Таким образом, условие выполнено, но ни в одной окрестности нет 51 красного ребра.

Оценка. Осталось показать, что при $k=50$ требуемая окрестность всегда найдётся. Предположим противное. Рассмотрим произвольную вершину v. В множестве $N(v)$ найдутся две вершины u_1 и u_2, соединённые красным ребром. Тогда из u_1 выходит синее ребро в какую-то вершину, не лежащую в $N(v)\cup\{v\}$ — обозначим её через w. Итак, вершины v и w соединены красным ребром, но множества $N(v)$ и $N(w)$ пересекаются — хотя бы по u_1.

Положим $P=N(v)\cap N(w)$; пусть t — количество вершин в P, тогда $1\leqslant t\leqslant 100$. Обозначим через Q множество всех вершин в $N(v)$, не лежащих в P, а через R множество всех вершин в $N(w)$, не лежащих в P; тогда в Q и R по $100-t$ вершин. Пусть $S=N(v)\cup\cup N(w)=P\cup Q\cup R$; тогда число вершин в S равно $t+2(200-t)=200-t$. Пусть есть всего a красных рёбер, соединяющих вершины P друг с другом, b красных рёбер, соединяющих P с Q, и c красных рёбер, соединяющих P с R.

Из каждой вершины p множества P идут синие рёбра в v, в w, и ещё максимум 98 синих рёбер в S; значит из p идут не менее $(200-t)-98-1=101-t$ красных рёбер в S. Просуммировав эти количества по всем t вершинам множества P, мы учтём каждое из a красных рёбер, соединяющих вершины P друг с другом, дважды, а каждое из $b+c$ красных рёбер, соединяющих P с вершинами из $Q\cup R$, по разу, то есть получим оценку $2a+b+c\geqslant t(101-t)$. С другой стороны, на множестве $N(v)$ есть хотя бы $a+b$ красных рёбер, а на множестве $N(w)$ — хотя бы $a+c$ красных рёбер; по нашему предположению, оба этих количества не превосходят 49, поэтому $2\cdot 49\geqslant(a+b)+(a+c)=2a+b+c\geqslant t(101-t)$. Но это неравенство неверно, поскольку $t(101-t)=\frac{1}{4}(101^2-(2t-101)^2)\geqslant\frac{1}{4}(101^2-99^2)=100$.

Решение 2. Приведём другое доказательство того, что при $k=50$ требуемая окрестность $N(v)$ найдётся. Опять же предположим противное. Воспользуемся следующими двумя нехитрыми соображениями.

Лемма 1. Пусть у вершины $u\in N(v)$ есть ровно t вершин в $N(v)$, с которыми она соединена красным ребром. Тогда u соединена синими рёбрами ровно с t вершинами, отличными от v и не лежащими в $N(v)$.

Доказательство. Вершина u соединена синими рёбрами с v и ровно с $99-t$ вершинами в $N(v)$. Значит, количество остальных вершин, с которыми она соединена синими рёбрами, равно $100-1-(99-t)=t$. ☐

Лемма 2. Пусть у вершины $u \in N(v)$ есть t вершин в $N(v)$, с которыми она соединена красными рёбрами. Тогда в $N(v)$ есть как минимум $t+1$ вершин, каждая из которых соединена со всеми остальными 99 вершинами в $N(v)$ сними рёбрами.

Доказательство. Если это не так, то из вершины u выходит t красных рёбер в другие вершины $N(v)$, и ещё минимум из $99-t$ других вершин в $N(v)$ выходит хотя бы по одному красному ребру в вершины $N(v)$. Значит, общее количество красных рёбер между вершинами множества $N(v)$ не меньше $(t+(99-t))/2 > 49$, то есть их хотя бы 50. Это противоречит нашему предположению. ☐

Перейдём к решению. Рассмотрим произвольную вершину v. Выберем вершину $w \in \in N(v)$, из которой выходит наибольшее количество t красных рёбер в другие вершины из $N(v)$ (тогда $t > 0$). Обозначим через T множество вершин, соединённых с w синим ребром, а с v — красным; по лемме 1, в T ровно t вершин.

В множестве $N(w)$ содержится вершина v; при этом она соединёна с t вершинами из $N(w)$ красными рёбрами — а именно, с вершинами из T. По лемме 2, в $N(w)$ есть $t+1$ вершин, каждая из которых соединена синими рёбрами со всеми вершинами из $N(w)$ (отличными от неё); обозначим через S множество этих вершин. В частности, v не лежит в S (ибо из v выходят красные рёбра в T), и все вершины из S соединены синими рёбрами с v, то есть S содержится в $N(w) \cap N(v)$.

Рассмотрим теперь какую-нибудь вершину u из $N(v)$, соединённую с w красным ребром. Любая вершина $s \in S$ соединена синими рёбрами со всеми другими вершинами из $N(w)$ и с самой w — здесь уже перечислены все 100 синих рёбер, выходящих из неё. Значит, s соединена с u красным ребром. Но тогда из u выходит $t+2$ красных ребра в вершины из $N(v)$ — а именно, в w и во все вершины из S. Это противоречит выбору t; значит, наше исходное предположение неверно, что мы и хотели доказать.

Замечание. Существуют и другие способы доказать оценку.

Например, опять же в предположении противного, можно выбрать наибольшее t, при котором найдутся вершины v и $w \in N(v)$ такие, что w соединена с t вершинами из $N(v)$ красными рёбрами (тогда $t \leq 49$). Опять же обозначим через T множество вершин из $N(w)$, не лежащих в $N(v) \cup \{v\}$; тогда $|T| = t$. Пусть $Q = N(w) \setminus T$; тогда из леммы 1 можно вывести, что из вершин множества Q выходит суммарно не более $98-t$ синих рёбер в вершины из T. Значит, количество красных рёбер между Q и T не меньше, чем $\Delta = t(100-t)-(98-t)$; нетрудно показать, что $\Delta > t^2$, и потому в T найдётся вершина, соединённая более чем с t вершинами из Q красными рёбрами. Это противоречит выбору t, ибо все эти вершины лежат в $N(w)$.

(П) Показано только, что при $k \geqslant$ ‘51 требуемой вершины может не найтись .... 1 балл

(О) Доказано, что при $k = 50$ требуемая вершина найдётся всегда .... 6 баллов

Частичные продвижения в оценке (суммирующиеся с баллами за пример) оцениваются так.

(Л1) Сформулирована и доказана лемма 1 .... 0 баллов

(Л1′) Если лемма 1 используется без доказательства ....баллы не снимаются

(Л2) Сформулирована и доказана лемма 2 .... 1 балл

(И1) Выбраны две вершины v и w, соединённые красным ребром, но имеющие общего соседа (по синим рёбрам), и замечено, что из такого общего соседа идёт красное ребро в вершину из $N(v) \cup N(w)$ ....1 балл

(И2) В $N(v)$ выбрана вершина w, из которой идёт наибольшее число красных рёбер в $N(v)$ ....1 балл

Баллы за (И1) и (И2) не складываются друг с другом, но складываются с баллом за (Л2).

10 класс

10.6. На окружности отмечено 16 точек, которые делят окружность на 16 равных дуг. Петя расставил в этих точках (в некотором порядке) 16 последовательных натуральных чисел. Далее для каждой пары диаметрально противоположных точек Петя вычислил сумму чисел в этих точках. Могло ли оказаться, что полученные 8 сумм представляют собой 8 последовательных натуральных чисел?

Ответ: не могло.

Решение.

Предположим противное: для некоторого набора расставленных чисел $n, n+1, \ldots, n+15$ наши суммы в парах равны $s, s+1, \ldots, s+7$ (здесь n и s — некоторые натуральные числа). Тогда сумма S всех чисел с одной стороны равна $S = n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+15) = 16n+15\cdot 8$, а с другой стороны, она равна $S = s+(s+1)+(s+2)+\ldots+(s+7) = 8s+7\cdot 4$. Из первого равенства видим, что S делится на 8, а из второго — что не делится на 8. Противоречие.

(A) Общая сумма приравнена к сумме чисел в парах .... 2 балла

10.7. На координатной плоскости проведена прямая $ax+by+c=0$, где a, b, c — некоторые положительные числа. Известно, что эта прямая касается окружности $x^2+y^2=1$. Докажите, что если взять три отрезка с длинами a, b, c, то из них можно сложить прямоугольный треугольник.

Решение 1. Достаточно доказать, что $c^2 = a^2+b^2$.

Так как прямая и окружность имеют единственную общую точку, система уравнений $ax+by+c=0$, $x^2+y^2=1$ имеет единственное решение.

Выразим $by = -ax-c$ и подставим в уравнение окружности $b^2(x^2+y^2) = b^2$. Получим $b^2x^2+(ax+c)^2-b^2 = 0 \iff (a^2+b^2)x^2+2ac\,x+(c^2-b^2) = 0$. Это квадратное уравнение должно иметь единственный корень, значит дискриминант должен обращаться в 0.

Имеем $D/4 = (ac)^2-(a^2+b^2)(c^2-b^2) = 0 \iff b^2(a^2+b^2-c^2) = 0$, откуда $a^2+b^2-c^2 = 0$, что и требуется.

Решение 2. Прямая касается окружности $x^2+y^2=1$, если расстояние от центра $(0;0)$ до этой прямой равно 1. По формуле расстояния от точки до прямой получаем, что $1 = |\frac{a\cdot 0+b\cdot 0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}|$, откуда $\sqrt{a^2+b^2} = |c|$ или $a^2+b^2 = c^2$.

Замечание. Есть и другие подходы к решению. Например, подставляя $x=0$ и $y=0$ в уравнение прямой, понимаем, что наша прямая пересекает оси координат в точках $A(-\frac{c}{a}, 0)$ и $B(0, -\frac{c}{b})$. Значит, мы знаем катеты прямоугольного треугольника OAB, а кроме того, из касания следует, что высота OH этого треугольника равна 1. Составив уравнение, связывающее величины OA, OB, OH (скажем, выразив площадь двумя способами: $OA\cdot OB = \sqrt{OA^2+OB^2}\cdot OH$), получаем нужное нам соотношение $a^2+b^2 = c^2$.

(A) Верно записано условие касания (через дискриминант квадратного уравнения или через формулу расстояния от точки до прямой и т.д.) .... 3 балла

(B) Замечено, что для решения нужно доказать равенство $c^2 = a^2+b^2$ .... баллы не добавляются

10.8. В конференции участвуют 2026 математиков, у каждого из которых есть некоторое количество друзей (возможно, ни одного) среди остальных. Дружба взаимна. Известно, что выполняется условие: если двое математиков дружат, то количества друзей у них отличаются ровно на 1. Найдите наибольшее возможное количество пар друзей.

Ответ: $1013\cdot 1012$.

Решение. Положим $k = 1013$. Поставим в соответствие каждому математику вершину, и соединим ребром вершины, соответствующие друзьям. Мы получили граф, обладающий таким свойством: степени любых двух соседних (т.е. соединенных ребром) вершин отличаются ровно на 1. Пусть V и E — множества вершин и рёбер этого графа, тогда $|V| = 2k$. Нам нужно найти максимальное $|E|$ (т. е. максимальное количество рёбер в таком графе).

Пример. Пусть одна вершина не соединена ни с какой другой. Остальные вершины разобьём на множества X и Y размера k и $k-1$ соответственно, и соединим ребром каждую вершину из X с каждой вершиной из Y. Тогда условие выполняется, поскольку степень каждой вершины из X равна $k-1$, а степень каждой вершины из Y равна k. При этом всего проведено $k(k-1)$ рёбер.

Оценка. Докажем, что $|E| \leqslant k(k-1)$. Обозначим через X_i множество вершин степени i. По условию, ребро может соединять только две вершины из X_{i-1} и X_i (при некотором i). Пусть m — максимальная степень вершины (т.е. $|X_m| > 0$ и $|X_{m+1}| = |X_{m+2}| = \ldots = 0$).

1) Если $m \leqslant k-1$, то степень каждой вершины в графе не больше $k-1$, поэтому $2|E| \leqslant (k-1) \cdot |V| = (k-1) \cdot (2k)$, откуда $|E| \leqslant k(k-1)$.

2) Пусть $m \geqslant k+1$. Возьмем вершину $A \in X_m$. Она соединена с m вершинами, каждая из которых лежит в X_{m-1}. Отсюда $|X_{m-1}| \geqslant m$. Возьмем вершину $B \in X_{m-1}$. Она соединена с $m-1$ вершинами (каждая из которых лежит в X_m или в X_{m-2}). Значит, $|V| \geqslant |X_{m-1}| + |X_m| + |X_{m-2}| \geqslant m + m - 1 \geqslant k + 1 + k > 2k = |V|$ — противоречие.

3) Остается рассмотреть случай $m = k$. Каждое ребро соединяет вершину из множества $Y = X_k \cup X_{k-2} \cup X_{k-4} \cup \ldots$ с вершиной из множества $Z = X_{k-1} \cup X_{k-3} \cup X_{k-5} \cup \ldots$. Поэтому $|E|$ равно количеству ребер, исходящих из Y, следовательно, $|E| \leqslant k \cdot |Y|$. А также $|E|$ равно количеству ребер, исходящих из Z, откуда $|E| \leqslant (k-1) \cdot |Z|$.

Если $|Y| \leqslant k-1$, то в силу первого неравенства $|E| \leqslant k \cdot |Y| \leqslant k(k-1)$. Иначе $|Y| \geqslant k$, но тогда $|Z| \leqslant k$, и в силу второго неравенства, $|E| \leqslant (k-1) \cdot |Z| \leqslant (k-1) \cdot k$.

Итак, во всех случаях доказана оценка $|E| \leqslant (k-1)k$.

Замечание. В оценке случай 1 может быть разобран так же, как случай 3.

(Z) Только верный ответ. .... баллы не добавляются
(Y) Переформулировка на языке графов. .... баллы не добавляются
(A) Приведен верный пример с $k(k-1)$ ребрами. .... 2 балла
(B) Полностью доказана оценка $|E| \leqslant k(k-1)$. .... 5 баллов
(B1) В оценке разобран случай $m \leqslant k-1$. .... 1 балл
(B2) В оценке разобран случай $m \geqslant k+1$. .... 1 балл
(B3) В оценке разобран случай $m = k$. .... 2 балла

В случае не полностью доказанной части «Оценка» баллы за частичные продвижения (B1), (B2), (B3) суммируются. Набранные баллы по частям (A) («Пример») и (B) («Оценка») суммируются.

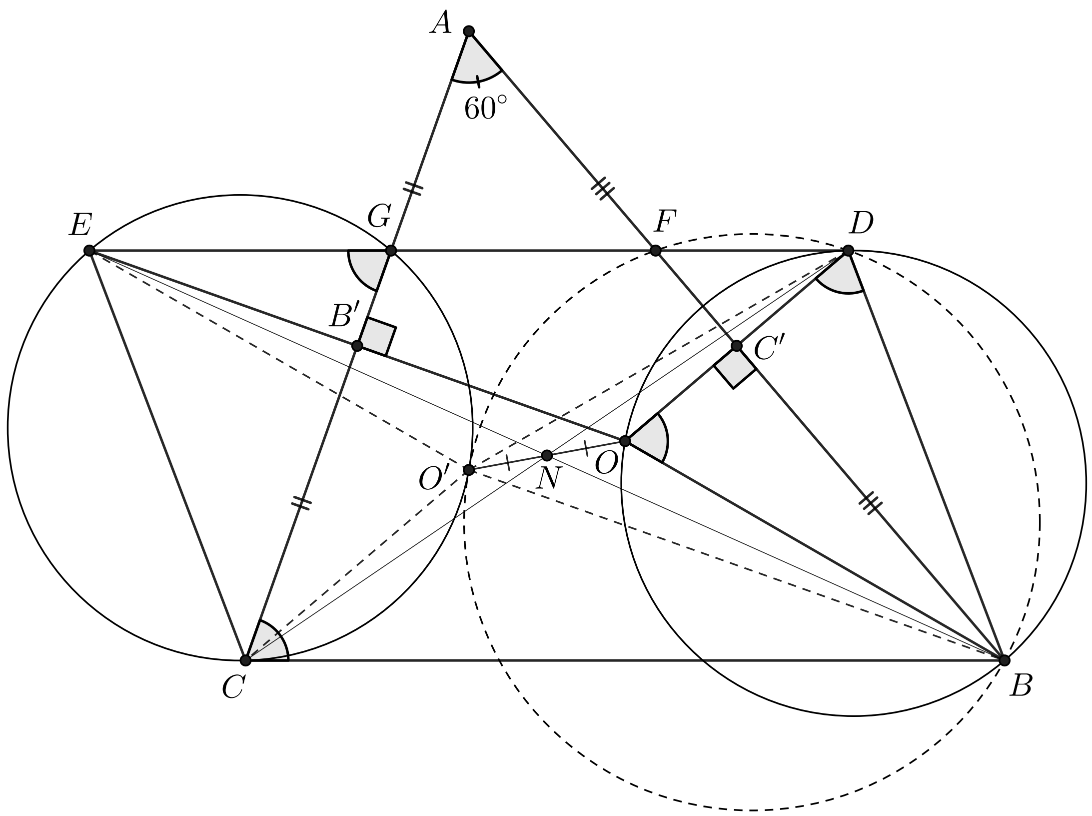
10.9. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle BAC = 60^\circ$. Точки D и E симметричны его центру описанной окружности O относительно сторон AB и AC соответственно. Прямая DE пересекает отрезки AB и AC в точках F и G соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BDF и CEG касаются.

Решение. Пусть B' и C' — середины AC и AB. Тогда $B'C'$ — средняя линия в треугольнике ODE, поэтому $DE \parallel B'C' \parallel BC$ и $DE = 2B'C' = BC$. Значит, $CEDB$ — параллелограмм.

Далее, $\angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOA = \angle BCA = \angle CGE$. Тем самым дуги BOD и CGE равны по величине и построены на противоположных сторонах параллелограмма $CEDB$ внутрь него. Следовательно, эти дуги симметричны относительно центра параллелограмма N. Значит, дуга CGE проходит через точку O', симметричную точке O относительно N, Аналогично, O' лежит на окружности (BDF).

Остается доказать касание окружностей. Для этого достаточно установить равенство $\angle DO'E = \angle DBO' + \angle O'CE$ (тогда касательная m, проведенная к $(BDFO')$ в точке O' будет составлять с $O'E$ угол равный $\angle O'CE$, а значит, m будет являться и касательной к $(CGEO')$).

Используя симметрию относительно N и относительно прямых AB и AC, получаем $\angle DO'E = \angle COB = 120^\circ$, а также $\angle DBO' = \angle CEO = \angle EOC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC$ и аналогично $\angle O'CE = \angle BCA$. Видим, что $\angle DBO' + \angle O'CE = \angle ABC + \angle BCA = 120^\circ = \angle DO'E$. Тем самым доказательство завершено.



Замечание. Можно решить задачу, используя другие описания точки касания. Например, определим O' как вторую точку пересечения окружностей (BOC) и (FOG). Тогда из счета углов (с использованием вписанных четырехугольников) можно получить $\angle GO'C + \angle GOC = 180^\circ$, значит окружности $(GO'C)$ и (GOC) симметричны относительно GC, т.е. окружность $(GO'C)$ совпадает с нашей окружностью (GEC). Аналогично $(FO'B)$ совпадает с окружностью (FDB).

Далее $\angle CO'B = \angle COB = 120^\circ$, а $\angle CGO' + \angle O'FB = \angle CGO' + \angle O'GO - \angle O'FO + {} + \angle O'FB = \angle CGO + \angle OFB = \angle EGC + \angle BFD = \angle BCA + \angle ABC = 120^\circ$. Получили равенство $\angle CO'B = \angle CGO' + \angle O'FB$, которое доказывает касание наших окружностей (CGO') и (BFO').

Также можно доказать, что наша точка касания O' на самом деле является ортоцентром треугольника ABC.

(A) Найдено (и обосновано) одно из перечисленных в решении и замечании описание общей точки окружностей BDF и CEG (но касание не доказано). .... 3 балла

10.10. Дан многочлен f третьей степени с целыми коэффициентами, причём старший коэффициент f равен 1 или -1. Известно, что f имеет три различных корня, каждый из которых равен квадрату натурального числа. Докажите, что в последовательности значений $|f(1)|$, $|f(2)|$, $|f(3)|$, $\ldots$ встретится квадрат натурального числа.

Решение. Из условия следует, что $f(x) = \pm(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)$, где a, b, c — натуральные числа. Далее, не умаляя общности, считаем, что $a \leqslant b \leqslant c$.

Положим $n = ac+bc-ab$. Очевидно, n — натуральное (так как $n > bc-ab = b(c-a) \geqslant 0$). Тогда $n-a^2 = ac+bc-ab-a^2 = (a+b)(c-a)$, $n-b^2 = ac+bc-ab-b^2 = (a+b)(c-b)$, $n-c^2 = ac+bc-ab-c^2 = (a-c)(c-b)$. Тогда $f(n) = \mp(a+b)^2(c-a)^2(c-b)^2$, что нам и подходит.

(A) За переформулировку без многочлена (в терминах выражения $(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)$) .... баллы не начисляются

(B) За нахождение значений 0 (в точках $x=a^2$, $x=b^2$, $x=c^2$) ... баллы не начисляются

(C) Отмечено, что $|f(0)|$ — точный квадрат .... баллы не начисляются

(D) Отмечено, что $|f(-ab-bc-ca)|$ — квадрат натурального числа. .... 2 балла

(E) Верно найдено нужное целое значение n, но не доказано, что оно положительно .... снимается 1 балл

11 класс

11.6. Существуют ли такие составные натуральные числа $m > n > 1$, что у чисел m, n, $m+n$ и $m-n$ наибольший делитель, отличный от самого числа, одинаковый?

Ответ: Существуют.

Решение. Положим $m = 22$, $n = 55$. Тогда $m+n = 77$ и $m-n = 33$, у каждого из четырёх чисел наибольший делитель, отличный от самого числа, равен 11.

Замечание. Несложно показать, что все примеры имеют вид $n = 2A, m = 5A$, где $A > 1$ — натуральное число, не кратное 2, 3, 5 и 7.

(A) Отсутствие обоснования верного примера .... баллы не снимаются

(A1) Арифметические ошибки при вычислении верного примера, не влияющие на суть решения .... баллы не снимаются

(B) Приведён верный пример, а также ещё и хотя бы один неверный пример, про который ошибочно утверждается, что этот пример правильный .... 4 балла

(Z) Нет верного примера .... 0 баллов

11.7. По кругу расставили 2026 попарно различных иррациональных чисел и для каждой пары стоящих рядом чисел a и b вычислили значение выражения $\dfrac{ab}{a-b}$. Может ли ровно одно из 2026 полученных значений быть иррациональным?

Ответ: Не может.

Решение 1. Заметим, что для ненулевых $a \neq b$ число

$$f(a,b) = \frac{ab}{a-b}$$

рационально в том и только в том случае, когда рационально обратное число $\frac{a-b}{ab} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$. Обозначим числа, расставленные по кругу, через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $n = 2026$ и предположим, что рациональные значения были получены для всех пар, кроме пары a_n, a_1. Тогда, в силу сказанного выше, числа $\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3}, \ldots, \dfrac{1}{a_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n}$ — все рациональные. Следовательно, их сумма $\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_n}$ — тоже рациональное число, а это означает, что число $f(a_n, a_1)$ также рационально, противоречие.

Решение 2. Как и в первом решении, положим $f(a,b) = \frac{ab}{a-b}$. Покажем, что если числа $f(a,b) = x$ и $f(b,c) = y$ рациональны, то число $f(a,c)$ тоже рационально. Мы знаем, что $ab = ax - bx$ и $bc = by - cy$, откуда $a = \frac{bx}{x-b}$ и $c = \frac{by}{y+b}$. Отметим, что знаменатели отличны от нуля, поскольку числа x и y рациональны, а число b иррационально, а также $x \neq -y$, поскольку $a \neq c$. Таким образом

$$f(a,c) = \frac{\frac{bx}{x-b} \cdot \frac{by}{y+b}}{\frac{bx}{x-b} - \frac{by}{y+b}} = \frac{b^2xy}{bx(y+b) - by(x-b)} = \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{Q}.$$

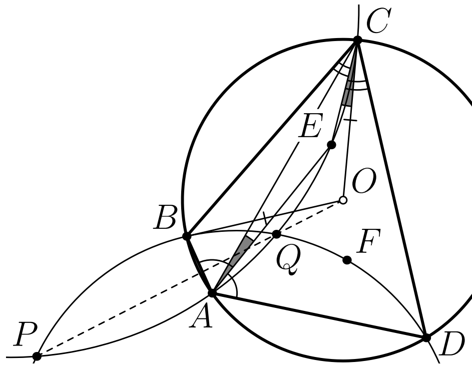
Перейдём к решению задачи. Обозначим числа, расставленные по кругу, через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n = 2026$. Пусть числа $f(a_i, a_{i+1})$ рациональны при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Поскольку $f(a_1, a_2) \in \mathbb{Q}$ и $f(a_2, a_3) \in \mathbb{Q}$, то $f(a_1, a_3) \in \mathbb{Q}$. Так как ещё и $f(a_3, a_4) \in \mathbb{Q}$, получаем, что $f(a_1, a_4) \in \mathbb{Q}$. Продолжая это рассуждение, мы получаем, что все числа $f(a_1, a_i)$ рациональны, в частности, число $f(a_1, a_n)$, противоречие.

(A) В решениях, аналогичных приведённым выше, отсутствуют пояснения о том, что знаменатели отличны от нуля ($ab \neq 0$ в первом решении и $b - x \neq 0$, $x + y \neq 0$ во втором решении) .... баллы не снимаются

(B) Промежуточные вычисления содержат деление на выражение, которое может быть равно нулю .... не более 4 баллов

11.8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке E, а биссектрисы углов B и D — в точке F, причём точки O, E и F лежат внутри четырёхугольника. Описанные окружности треугольников ACE и BDF пересекаются в точках P и Q. Докажите, что точки O, P и Q лежат на одной прямой.

Решение. Можно считать, что точка E лежит в той же полуплоскости относительно прямой AC, что и точка D. Пусть углы BAD и BOC равны соответственно 2α и 2β. Тогда вписанный угол CAB равен β. Значит, $\angle EAC = \angle EAB - \angle CAB = \alpha - \beta$. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 2\alpha$, откуда $\angle BCE = 90^\circ - \alpha$. Из равнобедренного треугольника BOC находим $\angle BCO = 90^\circ - \beta$. Поэтому $\angle ECO = \angle BCO - \angle BCE = \alpha - \beta$, следовательно $\angle EAC = \angle ECO$, то есть окружность (ACE) касается прямой OC. Аналогично, окружность (BDF) касается прямой OB. Таким образом, степени точки O относительно этих окружностей равны OC^2 и OB^2 соответственно. Значит, точка O лежит на их радикальной оси, то есть прямой PQ.



Комментарии.

1. Поскольку $\angle EAC = \alpha - \beta$, то в разбираемом расположении точек $\alpha > \beta$. Поэтому $\angle BCO = 90^\circ - \beta > 90^\circ - \alpha = \angle BCE$, то есть точка O лежит внутри угла DCE, и вычисление $\angle ECO = \angle BCO - \angle BCE = \alpha - \beta$ корректно.

2. Можно показать, что на прямой PQ также лежит и точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

3. Хорошо известно, что внутренние биссектрисы четырёхугольника $ABCD$ образуют четырёхугольник, вписанный в окружность. Аналогичное верно и для внешних биссектрис четырёхугольника. Тогда можно показать, что центры получившихся окружностей лежат на прямой PQ, кроме того, это верно не только для вписанных четырёхугольников $ABCD$, а для любых выпуклых.

4. Как обычно, через (XYZ) обозначается описанная окружность треугольника XYZ.

(A) Требуемое в задаче переформулировано в терминах равенства степеней точки O относительно окружностей (ACE) и (BDF) .... баллы не начисляются

(B) Заявлено, что прямая OC касается окружности (ACE) .... 1 балл

(C) Доказано, что прямая OC касается окружности (ACE) .... 3 балла

(C′) Указано, что касание следует из подсчёта углов, но сам подсчёт углов не приведён .... 0 баллов

(C1) Доказано равенство углов EAC и ECO или иное равенство углов, из которого следует касание (C), но вывод про касание не сделан .... 1 балл

(C0) Подсчеты углов без дальнейших продвижений .... 0 баллов

(D) Из утверждения (B) и аналогичного ему для окружности (BDF) выведено решение задачи .... 2 балла

(M) Доказано, что степени точки O относительно окружностей (ACE) и (BDF) равны, но вывод о коллинеарности точек O, P, Q отсутствует .... снимается 1 балл

Штраф (M) применяется при отсутствии вывода о том, что точки O, P, Q лежат на одной прямой в полном решении или в частичном продвижении (D). Например, в работе сказано, что степени точки O относительно окружностей равны, это и требовалось доказать, однако нигде не указывалось, что такое равенство степеней равносильно требуемому в задаче или что PQ — радикальная ось двух окружностей.

С другой стороны, если без дополнительных пояснений утверждается, что из равенства степеней точки O относительно окружностей следует, что точки O, P, Q лежат на одной прямой, баллы НЕ снимаются.

(X) Доказано, что точка пересечения AC и BD лежит на PQ .... 0 баллов

(G) Нет объяснений о расположении точек O, E, F (например, как в пункте 1 замечания) .... баллы не снимаются

Баллы за части (A), (B), (C) суммируются.

11.9. Даны натуральные числа $n > k \geqslant 2$. В клетчатом квадрате $n \times n$ закрашено несколько клеток. В каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одна закрашенная клетка, причём в каждом ряду (строке или столбце) закрашенные клетки идут подряд. Известно, что нет целиком закрашенного квадрата $k \times k$. Какое наибольшее число клеток может быть закрашено?

Ответ: $2n(k-1)-(k-1)^2$.

Решение. *Пример.* Закрасим верхние $k-1$ строку и левый $k-1$ столбец. Тогда будет закрашено ровно $2n(k-1)-(k-1)^2$ клеток в соответствии с условием задачи.

Оценка. Пусть закрашенных клеток не меньше, чем $2n(k-1)-(k-1)^2+1$. Покажем, что есть полностью закрашенный квадрат $k \times k$. Отметим в каждой строке $k-1$ самых левых закрашенных клеток. Если в какой-то из строк закрашено меньшее число клеток, отмечаем все закрашенные клетки этой строки. Таким образом, отмечено не более $n(k-1)$ закрашенных клеток, причем в первых $k-1$ столбцах отмечены все закрашенные клетки.

Тогда закрашенных, но не отмеченных клеток не меньше, чем

$$2n(k-1)-(k-1)^2+1-n(k-1)=(n-k+1)(k-1)+1.$$

Следовательно, в каком-то из оставшихся $n-k+1$ столбцов есть хотя бы k закрашенных не отмеченных клеток. Выберем в таком столбце верхнюю и нижнюю из таких клеток, обозначим их через A и B соответственно.

Рассмотрим клетчатый прямоугольник, у которого горизонтальная сторона равна k, правая верхняя угловая клетка — клетка A, правая нижняя угловая клетка — клетка B. Тогда вертикальная сторона такого прямоугольника ℓ не меньше, чем k. Пусть A_1 — его верхняя левая угловая клетка. Тогда A_1 лежит в одной строке с клеткой A, причём клетка A закрашена и не отмечена. Значит, $k-1$ клетка в этой строке левее клетки A закрашены, поэтому обязательно закрашена клетка A_1. Аналогично, и нижняя угловая клетка рассмотренного прямоугольника $k \times \ell$ закрашена, следовательно, этот прямоугольник закрашен целиком. Поскольку $\ell \geqslant k$, мы можем выделить и целиком закрашенный квадрат $k \times k$, что и требовалось.

(A) Ответ и пример $2n(k-1)-(k-1)^2$ закрашенных клеток, удовлетворяющий условию задачи .... 2 балла

(AM) Ошибка в подсчёте ответа. В частности, если в качестве ответа указано число, отличающееся от верного ответа на 1 .... снимается 1 балл за часть (A)

(B) Оценка, то есть доказательство, что если закрашены хотя бы $2n(k-1)-(k-1)^2+1$ клеток, то можно найти закрашенный целиком квадрат $k \times k$ .... 5 баллов

(B0) Сведение к случаю, когда в каждом ряду закрашена хотя бы $k-1$ клетка .. 0 баллов

(B1) Закрашенные клетки разбиты на две группы, отмеченные и не отмеченные, как в приведённом решении .... 1 балл

(BM) Оценка доказывается в предположении, что в каждой строке отмечена ровно $k-1$ клетка (и сведение к этому случаю отсутствует) .... снимается 1 балл за часть (B)

(B2) Доказано, что в каком-то столбце есть хотя бы k закрашенных не отмеченных клеток, если всего закрашено хотя бы $2n(k-1)-(k-1)^2+1$ клеток .... 1 балл

(B3) Доказано, что существует полностью закрашенный квадрат $k \times k$, у которого найденный в (B2) столбец — крайний правый .... 3 балла

(B3a) Доказано, что не отмеченные закрашенные клетки в каждой вертикали идут подряд .... 1 балл

(B3b) Утверждение (B3) сформулировано, но не доказано. Например, без доказательства используется (B3a) .... 1 балл

Продвижения (B3), (B3a), (B3b) не суммируются. Остальные продвижения (и штрафы) по оценке суммируются между собой и суммируются с баллами за пример.

11.10. Пусть a, b, c — положительные числа, причём $a+b+c=3$. Докажите, что

$$\frac{a}{b^4+2b}+\frac{b}{c^4+2c}+\frac{c}{a^4+2a}\geqslant 1.$$

Решение 1. Заметим, что

$$\frac{a}{b^4+2b}=\frac{a}{b}-\frac{2ab^2}{b^3+2}\geqslant\frac{a}{b}-\frac{2ab^2}{3b}=\frac{a}{b}-\frac{2}{3}ab.\quad(\star)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $b^3+2=b^3+1+1\geqslant 3\sqrt[3]{b^3\cdot 1\cdot 1}=3b$. Оценим две другие дроби аналогично. По неравенству о средних

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3.$$

Кроме того, из неравенства Коши мы получаем, что

$$3(ab+bc+ca)=ab+bc+ca+2ab+2bc+2ac\leqslant$$
$$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}+2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2=9,$$

Поэтому $ab+bc+ca\leqslant 3$. Собирая все оценки вместе, получаем требуемое неравенство:

$$\frac{a}{b^4+2b}+\frac{b}{c^4+2c}+\frac{c}{a^4+2a}\geqslant\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{2}{3}(ab+bc+ca)\geqslant 3-\frac{2}{3}\cdot 3=1.$$

Решение 2. По неравенству о средних: $3=a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$, поэтому $abc\leqslant 1$. Тогда заметим, что

$$\frac{a}{b^4+2b}\geqslant\frac{a}{\frac{b^4}{abc}+2b}=\frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{b}{c}+2\cdot\frac{a}{b}}=T.\quad(\star\star)$$

Положим $\frac{a}{b}=x$, $\frac{b}{c}=y$, $\frac{c}{a}=z$, отметим, что $xyz=1$. В новых обозначениях

$$T=\frac{x^2}{y+2x}.$$

Оценивая аналогично два других слагаемых, нам остаётся доказать, что

$$\frac{x^2}{2x+y}+\frac{y^2}{2y+z}+\frac{z^2}{2z+x}\geqslant 1.\quad(\star\star\star)$$

Заметим, что по неравенству о средних $x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}=3$. Наконец, применим к сумме дробей неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$\frac{x^2}{2x+y}+\frac{y^2}{2y+z}+\frac{z^2}{2z+x}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{2x+y+2y+z+2z+x}=\frac{x+y+z}{3}\geqslant 1.$$

Критерии оценивания для решения 1. Решение разбивается на 3 части:

(A) — оценка $(\star)$;

(B) — оценка выражения $a/b+b/c+c/a$ и сведение к неравенству $ab+bc+ca\leqslant 3$;

(C) — доказательство неравенства $ab + bc + ca \leqslant 3$.

Продвижения за части (A), (B), (C) суммируются. Баллы внутри каждой из частей друг с другом не суммируются.

(A) Доказана оценка ($\star$) .... 3 балла

(A1) Сформулирована оценка ($\star$) .... 1 балл

(A2) Приведён рабочий план доказательства оценки ($\star$) с ошибками в переходах или без достаточных обоснований некоторых неравенств .... 2 балла

Примеры применения критерия (A2).

• *При доказательстве оценки* ($\star$) *неравенство* $2ab^2/(b^3 + 2) \leqslant 2ab^2/(3b)$ *не поясняется или доказывается неверно.*

• *Неравенство* $b^3 + 2 \geqslant 3b$ *при* $b > 0$ *используется без доказательства.*

(B) Задача сведена к доказательству неравенства $ab + bc + ca \leqslant 3$ .... 2 балла

(B0) После оценки ($\star$) без дополнительных пояснений утверждается, что достаточно доказать неравенство $ab + bc + ca \leqslant 3$ .... 0 баллов

(B1) Неравенство $a/b + b/c + c/a \geqslant 3$ при $a, b, c > 0$ используется без доказательства или формулируется как известный факт .... баллы не снимаются

(B2) После оценки ($\star$) указано, что $a/b + b/c + c/a \geqslant 3$, при этом отсутствует вывод, что теперь достаточно доказать неравенство $ab + bc + ca \leqslant 3$ .... 1 балл

(C) После оценки ($\star$) доказано неравенство $ab + bc + ca \leqslant 3$ .... 2 балла

Примеры применения критерия (C).

• *Неравенство* $ab + bc + ca \leqslant 3$ *использовано без обоснования или сформулировано как известный факт — ставится 0 баллов.*

• *Неравенство* $ab+bc+ca \leqslant 3$ *доказано с неточностями или пробелами в обоснованиях — ставится не более 1 балла.*

• *Неравенство* $ab+bc+ca \leqslant 3$ *доказано, но в работе нет оценки* ($\star$) *— ставится 0 баллов.*

Критерии оценивания для решения 2.

(P) Доказана оценка ($\star\star$) .... 2 балла

(Q) После замены переменных задача сведена к неравенству ($\star\star\star$) .... 2 балла

(R) Доказательство неравенства ($\star\star\star$) .... 3 балла

(Z) Доказано, что $abc \leqslant 1$ .... 0 баллов

(Z$'$) Сформулировано, что $abc \leqslant 1$ и далее используется без дополнительных пояснений .... баллы не снимаются

(M1) Используется, что $abc \leqslant 1$, но этот факт даже не формулируется ... снимается 1 балл

(M2) Неравенство доказано при условии $abc = 1$, а не $a + b + c = 3$ ...... снимается 2 балла

Продвижения по частям (P), (Q), (R) суммируются друг с другом и со штрафами (M). При этом сами штрафы (M1) и (M2) не суммируются.